



## Extraction de houppiers par processus objet

Guillaume Perrin, Xavier Descombes, Josiane Zerubia

### ► To cite this version:

Guillaume Perrin, Xavier Descombes, Josiane Zerubia. Extraction de houppiers par processus objet. RR-5037, INRIA. 2003. inria-00071547

**HAL Id: inria-00071547**

**<https://inria.hal.science/inria-00071547>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

## *Extraction de houppiers par processus objet*

Guillaume Perrin — Xavier Descombes — Josiane Zerubia

N° 5037

Décembre 2003

THÈME 3

A large blue rectangle occupies the lower half of the page. Overlaid on the left side of this rectangle is a large, light gray stylized letter 'R'. To the right of the 'R', the words 'Rapport de recherche' are written in a white serif font. A horizontal gray brushstroke underline is positioned beneath the text.

*Rapport  
de recherche*





## Extraction de houppiers par processus objet

Guillaume Perrin , Xavier Descombes , Josiane Zerubia

Thème 3 — Interaction homme-machine,  
images, données, connaissances  
Projet Ariana

Rapport de recherche n° 5037 — Décembre 2003 — 58 pages

**Résumé :** Nous cherchons à extraire des houppiers à partir d'images de télédétection. Pour ce faire, nous construisons un processus objet et assimilons nos images d'arbres à des réalisations de ce processus. La première étape consiste à définir d'une part les objets géométriques modélisant les arbres, et d'autre part la densité du processus à simuler.

La seconde étape consiste à construire un algorithme MCMC à sauts réversibles, et une estimée de la configuration d'objets. Les transitions aléatoires de la chaîne sont régies par des noyaux de propositions, chacun étant associé à une perturbation.

Nous testons notre modèle sur des images aériennes de peupleraies fournies par l'IFN.

**Mots-clés :** extraction de houppiers, géométrie stochastique, processus ponctuel marqué, processus objet, algorithme MCMC à sauts réversibles, recuit simulé.

## Tree crown extraction using marked point processes

**Abstract:** In this paper we aim at extracting tree crowns from remotely sensed images. Our approach is to consider that these images are some realizations of a marked point process. The first step is to define the geometrical objects that design the trees, and the density of the process.

Then, we use a reversible jump MCMC dynamics and a simulated annealing to get the maximum a posteriori estimator of the tree crowns distribution on the image. Transitions of the Markov chain are managed by some specific proposition kernels. Results are shown on aerial images of poplars given by IFN.

**Key-words:** tree crown extraction, stochastic geometry, marked point process, object process, reversible jump MCMC, simulated annealing algorithm.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Rappels sur les processus ponctuels et leur simulation</b>	<b>7</b>
3.1	Les processus ponctuels . . . . .	7
3.1.1	Premières définitions . . . . .	7
3.1.2	Exemple : le processus ponctuel de Poisson . . . . .	10
3.1.3	Stabilité d'un processus ponctuel . . . . .	11
3.2	Simulation par un algorithme MCMC à sauts réversibles . . . . .	11
3.2.1	Le principe . . . . .	11
3.2.2	Algorithme . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Le modèle proposé</b>	<b>13</b>
4.1	Modèle géométrique . . . . .	13
4.2	Densité du processus . . . . .	14
4.2.1	Processus ponctuel de référence . . . . .	14
4.2.2	Cadre bayésien . . . . .	14
4.2.3	Terme a priori $h_p(\mathbf{x})$ . . . . .	15
4.2.4	Terme d'attaches aux données $\mathcal{L}(\mathcal{J} \mathbf{x})$ . . . . .	19
4.2.5	Stabilité du processus . . . . .	23
4.3	Choix de l'estimateur . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Composition du noyau de propositions</b>	<b>31</b>
5.1	Mouvements simples . . . . .	31
5.1.1	Translation . . . . .	32
5.1.2	Homothétie . . . . .	32
5.1.3	Translation et Homothétie . . . . .	33
5.1.4	Noyaux de propositions et mesure symétrique . . . . .	34
5.2	Noyau de propositions de Naissance/Mort . . . . .	35
5.2.1	Calcul des noyaux de propositions . . . . .	35
5.2.2	Mesure symétrique et dérivée de Radon Nikodym . . . . .	35
5.2.3	Taux d'acceptation des mouvements de naissance et de mort . . . . .	36
5.3	Noyau de propositions de Fusion/Division . . . . .	36
5.3.1	Description de la fusion de deux objets . . . . .	38
5.3.2	Description de la division d'un objet . . . . .	38

5.3.3	Calcul des noyaux de propositions . . . . .	41
5.3.4	Mesure symétrique $\xi_{fd}$ . . . . .	41
5.3.5	Dérivées de Radon Nikodym . . . . .	42
5.3.6	Taux d'acceptation des mouvements de fusion et de division .	43
<b>6</b>	<b>Convergence de l'algorithme proposé</b>	<b>43</b>
6.1	Irréductibilité de la chaîne . . . . .	44
6.2	Positivité au sens de Harris . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Résultats</b>	<b>49</b>
7.1	Choix de l'image de test . . . . .	49
7.2	Extraction . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Perspectives</b>	<b>52</b>
<b>9</b>	<b>Remerciements</b>	<b>55</b>

## 1 Notations

$\lambda_i(\cdot)$	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^i$
$\sharp(A)$	Cardinal de l'ensemble $A$
$\mathbf{1}_{x \in A}$	Fonction caractéristique sur $A$
$\mathbb{P}(X)$	Probabilité de l'évènement $X$
$\mathbb{E}[X]$	Espérance de la variable aléatoire $X$
$U$	Espace objet
$\mathcal{B}(U)$	Tribu de l'espace objet
$\nu(\cdot)$	Mesure de l'espace objet
$\mathcal{P}$	Espace des positions
$\mathcal{K}$	Espace des marques
$u \in U$	Objet $u$
$C_u \in \mathcal{P}$	Position de l'objet $u$
$\sim_i$	Relation d'équivalence $i$ sur $U$
$\Psi$	Espace des configurations
$\mathcal{B}(\Psi)$	Tribu de l'espace des configurations
$\mu(\cdot)$	Mesure de l'espace des configurations
$\mathbf{x} \in \Psi$	Configuration d'objets $\mathbf{x}$
$n(\mathbf{x})$	Nombre d'objets de $\mathbf{x}$
$n_{\sim_i}(\mathbf{x})$	Nombre de cliques d'objets au sens de $\sim_i$ dans $\mathbf{x}$
$\mathcal{V}_{\sim_i, \mathbf{x}}(u)$	Voisinage de $u$ dans $\mathbf{x}$ au sens de $\sim_i$
$\mathcal{J}$	Image observée
$\pi(d\mathbf{x})$	Mesure objectif
$h(\mathbf{x} \mathcal{J})$	Densité a posteriori
$h_p(\mathbf{x})$	Densité a priori
$\mathcal{L}(\mathcal{J} \mathbf{x})$	Vraisemblance de l'image $\mathcal{J}$
$Q_i(\mathbf{x}, A)$	Noyau de propositions du mouvement $i$ sur $\Psi \times \mathcal{B}(\Psi)$
$\xi_i(\cdot)$	Mesure symétrique du noyau $i$ sur $\Psi \times \Psi$
$\alpha_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Taux d'acceptation du mouvement $i$ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$



## 2 Introduction

De nombreuses données sur les milieux forestiers sont nécessaires aux organismes de gestion des forêts (ONF<sup>1</sup>) ou chargés d'en effectuer l'inventaire (IFN<sup>2</sup>). Ces besoins comprennent aussi bien des besoins généraux de gestion des forêts, comme l'évaluation de certains paramètres de la biodiversité (nombre d'arbres, distribution des diamètres des arbres, densité de boisement, ...), que des besoins plus particuliers comme celui de cartographier les types de peuplements en forêts de montagne par exemple. En raison des **progrès technologiques réalisés en matière de résolution** et de la baisse du coût d'obtention des images (due à l'arrivée des satellites haute résolution sur le marché civil), **de nouvelles perspectives s'ouvrent dans la connaissance des arbres et des forêts**. Dans ce contexte, un outil s'appuyant sur de telles images pour aider les forestiers, les gestionnaires du territoire et les écologues du paysage, s'avérerait fortement utile du point de vue économique.

Même si aucune méthode n'est totalement satisfaisante à ce jour en ce qui concerne la détection de houppiers<sup>3</sup>, un certain nombre de travaux fournissent un cadre préliminaire. Un premier type d'approches consiste à détecter les maxima locaux de l'image, puis à déterminer les zones d'influence de ces maxima à l'aide d'un algorithme de suivi de vallées. Chaque zone est alors assimilée à un houppier, et délimite les contours des arbres [3, 4]. Une autre méthode consiste à faire coïncider au mieux sur l'image des modèles optiques des arbres ("template matching"), puis d'en déduire les positions des sommets, en trouvant les maxima de la fonction de corrélation ainsi calculée [8, 9]. Enfin, d'autres techniques se basant sur des MNE<sup>4</sup> fournissent de bons résultats, mais nous ne nous y intéresserons pas car notre étude ne s'appuie que sur la donnée d'une image haute résolution classique (afin d'éviter le surcoût occasionné par l'achat d'un MNE).

L'approche que nous avons choisi d'adopter repose sur les **processus ponctuels marqués**. Celle-ci semble être particulièrement bien adaptée à notre problème. En effet, les objets mis en jeu par ces processus peuvent facilement être nos objets d'intérêt, c'est à dire des arbres : l'approche est alors sur-pixélique, on se détache de la représentation numérique induite par l'image pour se rapprocher du modèle de la réalité physique. De plus, les méthodes mises en jeu sont stochastiques, ce qui

---

1. Office National des Forêts

2. Inventaire Forestier National

3. Partie supérieure d'un arbre, comprenant l'ensemble des branches et les feuilles

4. Modèle Numérique d'Élévation

permet d'utiliser une panoplie d'outils classiques dans les problèmes inverses. Cette approche s'est révélée fructueuse pour d'autres applications, telles que l'extraction de réseaux linéiques routiers [6, 7] ou de caricatures de bâtiments [11, 12].

Nous cherchons à **extraire les houppiers des images de télédétection**, en les assimilant à une réalisation d'un processus objet défini par une densité  $h(\cdot)$  par rapport à une mesure de Poisson de référence  $\mu(\cdot)$ . La première étape de ce travail consiste donc à définir d'une part ces objets géométriques modélisant les arbres, et d'autre part la densité du processus à simuler. Ce modèle est échantillonné par un algorithme MCMC<sup>5</sup> à sauts réversibles, et optimisé à l'aide du maximum a posteriori obtenu grâce à un recuit simulé. Les transitions aléatoires de la chaîne sont régies par des noyaux de propositions, chacun étant associé à une perturbation, appelée mouvement, qu'il nous faut expliciter. Des résultats obtenus sur des images aériennes composées principalement de peupleraies (cf Fig. (1)), fournies par l'IFN, sont donnés à la fin de ce rapport. Nous avons concentré nos efforts dans un premier temps sur l'étude des peupliers. Par la suite, nous tâcherons de définir des modèles adaptés à chaque espèce d'arbres, ainsi qu'à des images présentant différentes conditions de terrain, illuminations et prises de vue.

### 3 Rappels sur les processus ponctuels et leur simulation

#### 3.1 Les processus ponctuels

##### 3.1.1 Premières définitions

Soit  $(U, \mathcal{B}(U), \nu(\cdot))$  un espace mesurable, muni de la mesure de Lebesgue  $\nu(\cdot)$ , tel que  $0 < \nu(U) < \infty$ . On appelle **configuration** tout ensemble dénombrable et non ordonné de points de  $U$ , l'**espace objet**. L'**espace des configurations**  $(\Psi, \mathcal{B}(\Psi), \mu(\cdot))$  est défini comme la réunion de toutes les configurations  $\mathbf{x}$ . Cet espace se décompose sous la forme d'une partition  $\Psi = \bigcup_n \Psi_n$ ,  $\Psi_n$  contenant l'ensemble des configurations  $\mathbf{x}$  composées exactement de  $n$  objets de  $U$ , avec  $\Psi_0 = \{\emptyset\}$  la

---

5. Markov Chain Monte Carlo



FIG. 1 – Image aérienne d'un peuplement de Saône et Loire ( $1878 \times 2370$  pixels)  
©IFN.

configuration vide. Sa mesure  $\mu(\cdot)$  s'exprime pour tout borélien  $A \in \mathcal{B}(\Psi)$  :

$$\mu(A) = e^{-\nu(U)} \left( \mathbf{1}_{[\emptyset \in A]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{n!} \right) \quad (1)$$

avec

$$\mu_n(A) = \int \dots \int \mathbf{1}_{[\{u_1, \dots, u_n\} \in A]} \nu(du_1) \dots \nu(du_n).$$

Nous travaillons sur un espace  $\Psi$  ne contenant que des configurations **localement finies** (pour tout ensemble  $A \subset U$ , le nombre de points de  $\mathbf{x}$  dans  $A$  est fini) et **simples** (les objets de  $\mathbf{x}$  sont deux à deux distincts).

### Définition 3.1

Un **processus ponctuel** sur  $U$  est une application d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dans  $\Psi$ , tel que pour tout borélien borné  $A \in \mathcal{B}(U)$ , le nombre  $N(A)$  de points dans  $A$  soit une variable aléatoire.

### Définition 3.2

Un **processus ponctuel marqué**, ou **processus objet**, sur  $U = \mathcal{P} \times \mathcal{K}$  est un processus ponctuel sur  $U = \mathcal{P} \times \mathcal{K}$  dont les positions sont dans  $\mathcal{P}$  et les marques dans  $\mathcal{K}$ , tel que le processus des points non marqués soit un processus ponctuel bien défini sur  $\mathcal{P}$ .

Par la suite, nous travaillerons sur des processus  $\mathbf{X}$  dont les lois  $P(\cdot)$  sont uniformément continues par rapport à  $\mu(\cdot)$ . Le théorème de Radon Nikodym nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle hypothèse sur nos mesures soit vérifiée, qui est que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\Psi) : \mu(A) = 0 \implies P(A) = 0. \quad (2)$$

La dérivée de Radon Nikodym est alors la densité  $f(\cdot)$  de  $P(\cdot)$  par rapport à  $\mu(\cdot)$ , et s'écrit

$$f = \frac{dP}{d\mu}$$

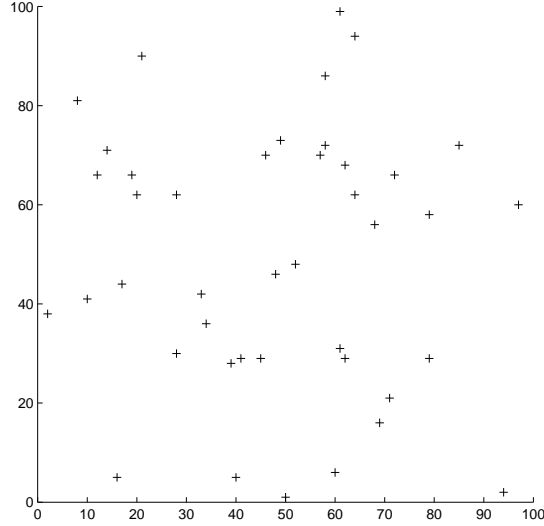


FIG. 2 – Réalisation d'un processus de Poisson homogène,  $a=0.005$ .

La définition d'un processus objet se réduit donc à la **définition d'une application**  $h(\cdot)$  mesurable positive sur  $(\Psi, \mathcal{B}(\Psi), \mu(\cdot))$ , et à la vérification de sa  $\mu$ -intégrabilité, c'est-à-dire à l'existence d'une constante de normalisation :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{h(\mathbf{x})}{\int_{\Psi} h(\mathbf{x}) \mu(d\mathbf{x})} \quad (3)$$

### 3.1.2 Exemple : le processus ponctuel de Poisson

Un processus ponctuel est un processus ponctuel de Poisson de loi d'intensité  $\sigma(\cdot)$ , si la variable aléatoire  $N(A)$  définie plus haut suit une loi de Poisson d'espérance  $\sigma(A)$  pour tout borélien  $A \in \mathcal{B}(U)$ . Une façon de les simuler consiste à tout d'abord générer le nombre de points  $n$  sur  $U$  du processus, selon la distribution

$$\mathbb{P}(N(U) = n) = e^{-\sigma(U)} \frac{\sigma(U)^n}{n!}$$

d'espérance  $\sigma(U)$ , puis de choisir ces  $n$  points sur  $U$  indépendamment suivant la loi  $\frac{\sigma(\cdot)}{\sigma(U)}$ . On parle de processus de Poisson homogène lorsque la loi  $\sigma(\cdot)$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue  $\nu(\cdot)$  sur  $U$ . La Fig. (2) nous donne un exemple de

processus de Poisson homogène, défini sur  $U = [0,100]^2$ , de paramètre de proportionnalité  $a = 0.005$ . Dans ce cas, on vérifie aisément que l'espérance du nombre de points dans  $U$ ,  $\mathbb{E}[N(U)]$ , est

$$\mathbb{E}[N(U)] = a.\nu(U) = 50.$$

### 3.1.3 Stabilité d'un processus ponctuel

#### Définition 3.3

Soit  $\mathbf{x}$  un processus ponctuel défini par une densité  $f(\mathbf{x})$  par rapport à un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité finie et non-atomique  $\mu(\cdot)$ . Alors  $\mathbf{x}$  a une **intensité conditionnelle de Papangelou** définie par :

$$\lambda^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{f(\mathbf{x} \cup \{\xi\})}{f(\mathbf{x})}, \forall \xi \in \{U - \bigcup_{i=1}^{n(\mathbf{x})} x_i\}.$$

Dans [2], Geyer donne une condition importante de stabilité des processus ponctuels basée sur l'intensité de Papangelou, qui lui permet d'établir la convergence d'algorithmes de simulation par chaînes de Markov :

Un processus défini par une densité non normalisée  $h(\cdot)$  par rapport à  $\mu(\cdot)$  est **localement stable** s'il existe un nombre réel  $M_h$  tel que :

$$h(\mathbf{x} \cup \{\xi\}) \leq M_h h(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Psi, \forall \xi \in U \quad (4)$$

c'est à dire si l'intensité conditionnelle de Papangelou est bornée.

## 3.2 Simulation par un algorithme MCMC à sauts réversibles

### 3.2.1 Le principe

L'algorithme de Metropolis-Hastings-Green (MHG) permet la simulation de processus ponctuels au moyen d'une chaîne de Markov. L'avantage de cet algorithme est que les transitions de la chaîne sont régies par des **noyaux de propositions**  $Q_i(\cdot, \cdot)$ ,

définis sur  $\Psi \times \mathcal{B}(\Psi)$  et choisis aléatoirement à chaque itération, qui autorisent des changements de dimension (**sauts réversibles**) dans l'espace des configurations  $\Psi$ . Celui-ci peut donc être exploré entièrement, au moyen par exemple des noyaux de propositions de **naissance** (ajout d'un objet à la configuration courante) et de **mort** (suppression d'un objet de la configuration courante).

Soit  $\pi(\cdot)$  notre **loi objectif**, de densité non normalisée  $h(\cdot)$  par rapport à la mesure de référence  $\mu(\cdot)$ . Le principe de cet algorithme est le suivant : à chaque itération, on propose une modification de l'état courant  $\mathbf{x}_t$  suivant un noyau de propositions  $Q_i(\mathbf{x}_t, \cdot)$  choisi avec une probabilité  $p_i$ . Ce **mouvement** est accepté avec une probabilité  $\alpha_i(\mathbf{x}_t, \cdot)$ , calculée de manière à assurer la  $\pi$ -réversibilité de la chaîne. Il est rejeté avec la probabilité complémentaire  $1 - \alpha_i(\mathbf{x}_t, \cdot)$ .

Pour calculer la probabilité d'acceptation  $\alpha_i(\mathbf{x}_t, \cdot)$ , nous avons besoin d'une **mesure symétrique**  $\xi_i(\cdot, \cdot)$ , définie sur  $\Psi \times \Psi$ , telle que  $\pi(\cdot)Q_i(\cdot, \cdot)$  soit absolument continu par rapport à  $\xi_i(\cdot, \cdot)$ . Dans ce cas, la densité de  $\pi(\cdot)Q_i(\cdot, \cdot)$  par rapport à  $\xi_i(\cdot, \cdot)$  existe (théorème de Radon-Nikodym) et s'écrit :

$$f_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}) = \frac{\pi(d\mathbf{x}_t)Q_i(\mathbf{x}_t, d\mathbf{y})}{\xi_i(d\mathbf{x}_t, d\mathbf{y})}. \quad (5)$$

La probabilité d'acceptation du mouvement  $i$ ,  $\mathbf{x}_t \rightarrow \mathbf{y}$ , s'exprime en fonction de cette dérivée :

$$\alpha_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}) = \min \left( 1, \frac{f_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}_t)}{f_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y})} \right). \quad (6)$$

### 3.2.2 Algorithme

Nous allons présenter cet algorithme dans le cadre d'un noyau de propositions multiple (7) :  $Q(\cdot, \cdot)$  est une combinaison linéaire de plusieurs noyaux de propositions  $Q_i(\cdot, \cdot)$ ,  $i \in I$ , choisis à chaque itération avec une probabilité  $p_i$  et décrivant chacun un mouvement différent de la chaîne. Avec la probabilité complémentaire  $p_\emptyset = 1 - \sum_{i \in I} p_i > 0$ , on impose à la chaîne de rester dans l'état courant.

$$Q(\mathbf{x}, \cdot) = \sum_{i \in I} p_i Q_i(\mathbf{x}, \cdot) + p_\emptyset \mathbf{1}_{[\mathbf{x} \in \cdot]}. \quad (7)$$

Nous rappelons qu'il est nécessaire que  $\pi(\cdot)Q_i(\cdot, \cdot)$  soit absolument continu par rapport à une mesure symétrique  $\xi_i(\cdot, \cdot)$  sur  $\Psi \times \Psi$ . De cette façon, on peut définir pour chacun des noyaux une dérivée de Radon Nikodym  $f_i(\cdot, \cdot)$  et calculer le taux

d'acceptation du mouvement en question.

#### ALGORITHME A

A partir de la configuration courante  $\mathbf{x}_t$  :

1. on choisit avec la probabilité  $p_i$  un des noyaux de propositions  $Q_i(\mathbf{x}_t, \cdot)$
2. on génère la configuration  $\mathbf{y}$ , connaissant la configuration  $\mathbf{x}_t$ , selon le noyau sélectionné  $Q_i(\mathbf{x}_t, \cdot)$ .
3. on calcule le **rapport de Green** relatif au noyau  $i$ ,  $R_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y})$ :

$$R_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}) = \frac{f_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}_t)}{f_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y})} = \frac{\pi(d\mathbf{y})Q_i(\mathbf{y}, d\mathbf{x}_t)}{\pi(d\mathbf{x}_t)Q_i(\mathbf{x}_t, d\mathbf{y})} \quad (8)$$

4. avec la probabilité  $\alpha_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}) = \min(1, R_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}))$  on accepte le nouvel état  $\mathbf{y}$ , sinon on conserve  $\mathbf{x}_t$ .

Dans [2], Geyer démontre la convergence de cet algorithme avec les mouvements de naissance uniforme (choix uniforme de l'objet de  $U$  à rajouter dans  $\mathbf{x}_t$ ) et de mort uniforme (choix équiprobable de l'objet à tuer dans  $\mathbf{x}_t$ ). C'est ce que nous devons faire avec nos noyaux de propositions, une fois notre modèle présenté.

## 4 Le modèle proposé

### 4.1 Modèle géométrique

La forme géométrique des peupliers est difficile à déterminer avec exactitude, d'autant plus qu'elle varie d'un arbre à l'autre et que l'image est discrète. Le choix du modèle géométrique de nos objets est donc une première décision d'importance à prendre. Plusieurs possibilités de modélisation de nos objets s'offrent à nous : polygonale, elliptique ou circulaire (cas particulier du précédent). Par souci de simplicité et pour minimiser la dimension de l'espace objet, nous avons opté pour une modélisation circulaire des peupliers. L'espace objet  $U$  sur lequel nous travaillons est par



conséquent un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, chaque objet  $u \in U$  est parfaitement caractérisé par la position de son centre dans l'image  $C_u = (X_u, Y_u)$  et par son rayon  $R_u$ .

Les images de données étant finies, les coordonnées des objets seront inscrites dans un pavé de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\mathcal{P}$  cet espace des positions :  $\mathcal{P} = [0, X_M] \times [0, Y_M]$ , avec  $X_M > 0$  et  $Y_M > 0$ . Il en sera de même pour les marques des objets, c'est à dire les rayons des cercles. On peut raisonnablement supposer l'existence de bornes  $R_m$  et  $R_M$  telles qu'aucun arbre n'ait une dimension supérieure à  $R_M$  ou inférieure à  $R_m$ , avec  $R_m < R_M$ . L'espace des marques, noté  $\mathcal{K}$ , est alors simplement  $\mathcal{K} = [R_m, R_M]$ . L'espace objet a donc la forme suivante :

$$U = \mathcal{P} \times \mathcal{K} = [0, X_M] \times [0, Y_M] \times [R_m, R_M]. \quad (9)$$

Pour définir un élément  $u$  de  $U$ , on écrira  $u = (X_u, Y_u, R_u)$ . L'espace des configurations, noté  $\Psi$ , est défini à partir de cet espace objet  $U$  comme étant la réunion de toutes les configurations d'objets de  $U$ .

$$\forall \mathbf{x} \in \Psi, \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{n(\mathbf{x})}\}, x_i \in U \forall i. \quad (10)$$

## 4.2 Densité du processus

### 4.2.1 Processus ponctuel de référence

Le processus ponctuel de référence est un **processus de Poisson de mesure d'intensité**  $\nu(\cdot)$ , mesure de Lebesgue définie sur  $\mathbb{R}^3$  ( $\nu(\cdot) = \lambda_3(\cdot)$ ). La loi de ce processus est notée  $\mu(\cdot)$ , et son expression pour tout borélien  $A \in \mathcal{B}(\Psi)$  est donnée par (1).

### 4.2.2 Cadre bayésien

Soit  $h(\cdot)$  la densité du processus ponctuel que l'on souhaite simuler. La mesure objectif  $\pi(\cdot)$ , mesure invariante de la chaîne de Markov, s'écrit alors :

$$\pi(d\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x}). \quad (11)$$

L'expression de la densité  $h(\cdot)$  est assurément un des points-clés de notre démarche. Non seulement elle doit contenir les informations suffisantes nous permettant de détecter les houppiers sur les images de forêts, mais elle doit en outre vérifier la condition de stabilité (4). Sous cette hypothèse en effet, ainsi que celle de réversibilité,

nous sommes assurés de la convergence de la chaîne de Markov vers la mesure objectif  $\pi(\cdot)$  [2, 5]. On rappelle cette condition de stabilité :

$$h(\mathbf{x} \cup \{\xi\}) \leq M_h h(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Psi, \forall \xi \in U.$$

La densité  $h(\mathbf{x})$  modélise en réalité la densité de probabilité de la configuration  $\mathbf{x}$ , étant donnée l'image  $\mathcal{J}$  sur laquelle nous devons extraire les houppiers. Nous l'écrivons  $h(\mathbf{x})$ , mais il s'agit en fait de la **densité a posteriori** des configurations. Dans un cadre bayésien, on peut alors appliquer la règle de Bayes :

$$h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}|\mathcal{J}) = \frac{h_p(\mathbf{x})\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})}{f(\mathcal{J})} \propto h_p(\mathbf{x})\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x}). \quad (12)$$

L'écriture bayésienne nécessite que nous soyons capable d'exprimer la **vraisemblance de l'image étant donnée la configuration  $\mathbf{x}$** , notée  $\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})$ . Le terme  $h_p(\mathbf{x})$  est quant à lui une **connaissance a priori sur les configurations**. Etant donné que nous travaillons sur une densité connue à un facteur multiplicatif près, nous écrirons par la suite

$$h(\mathbf{x}) = h_p(\mathbf{x})\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x}) \quad (13)$$

Nous consacrerons les deux sous-parties suivantes aux choix de la densité a priori et du terme de vraisemblance.

#### 4.2.3 Terme a priori $h_p(\mathbf{x})$

Ce terme renseigne sur toutes les connaissances a priori des configurations d'objets que l'on recherche. Une bonne définition des contraintes que l'on souhaite imposer aux configurations nous permet d'accélérer la convergence de l'algorithme : au cours des itérations, nous n'acceptons en effet que les configurations intéressantes au sens de cet a priori et pouvons nous retrouver plus rapidement dans un mode de la densité a posteriori.

#### Pénalisations envisageables

Partant du principe que l'un de nos objectifs est de dénombrer les arbres, il faut éviter de compter deux fois le même. Ainsi, une configuration comportant deux cercles se superposant, et détectant le même houppier, est à bannir. Par contre, une configuration avec deux cercles se superposant en partie, et détectant deux houppiers distincts, doit être possible si nous étudions une image où les arbres sont très proches les uns des autres. Ces deux cas de figure sont représentés sur la Fig. (3). Nous allons

introduire quelques définitions afin de caractériser dans l'espace des objets  $U$  ce phénomène de superposition.

#### Définition 4.1

On appelle **silhouette d'un objet**  $u \in U$  l'ensemble  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \subset \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ , intersection de l'espace des positions et de la boule fermée dans  $\mathbb{R}^2$  (ou disque), de centre  $C_u = (X_u, Y_u)$  et de rayon  $R_u$  :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) = \mathbb{B}_f(C_u, R_u) \cap \mathcal{P}.$$

On appelle alors **silhouette d'un ensemble d'objets**  $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$  (respectivement d'une configuration d'objets  $\mathbf{x} = (u_1, \dots, u_n)$ ), et on note  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$  (resp.  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x})$ ), l'ensemble défini par la réunion des silhouettes de chacun des objets :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathcal{U}) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u),$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \bigcup_{u \in \mathbf{x}} \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u).$$

La silhouette d'un objet  $u$  n'est donc pas toujours un disque, celui-ci peut en effet se retrouver tronqué si le centre  $C_u \in \mathcal{P}$  est à une distance inférieure à  $R_u$  des limites de l'espace des positions. On définit ensuite une **relation de voisinage**  $\sim_I$ , symétrique et réflexive, qui met en relation deux objets de  $U$  dont les silhouettes s'intersectent sur un ensemble non réduit à un point :

$$x_i \sim_I x_j \Leftrightarrow \lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(x_i) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(x_j)) > 0 \Leftrightarrow d(C_{x_i}, C_{x_j}) < R_{x_i} + R_{x_j},$$

où  $\lambda_2(\cdot)$ . et  $d(\cdot, \cdot)$  sont respectivement la mesure de Lebesgue et la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . On appelle alors naturellement **voisinage d'un objet**  $u \in \mathbf{x}$  au sens de la relation  $\sim_I$  l'ensemble

$$\mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}}(u) = \{x_i \in \mathbf{x} | x_i \neq u, x_i \sim_I u\}.$$

On note ensuite  $n_{\sim_I}(\mathbf{x})$  le nombre de paires d'objets (ou cliques) d'une configuration  $\mathbf{x}$ , voisins au sens de  $\sim_I$ . D'après cette définition, ainsi que celle du voisinage, on a :

$$\begin{aligned} n_{\sim_I}(\mathbf{x}) &= \sum_{x_i, x_j \in \mathbf{x}, x_i \neq x_j} \mathbf{1}_{x_i \sim_I x_j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathbf{x}} \#(\mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}}(u)). \end{aligned}$$

#### Définition 4.2

On appelle **ensemble d'intersection d'un objet  $u$  dans une configuration  $\mathbf{x}$** ,  $u \in \mathbf{x}$ , et on note  $\cap_{\mathbf{x}}(u)$  l'ensemble

$$\cap_{\mathbf{x}}(u) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}}(u)).$$

Par définition du voisinage  $\mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}}(u)$ , on a aussi :

$$\cap_{\mathbf{x}}(u) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x} \setminus \{u\})$$

puisque seuls les voisins de  $u$  au sens de  $\sim_I$  l'intersectent.

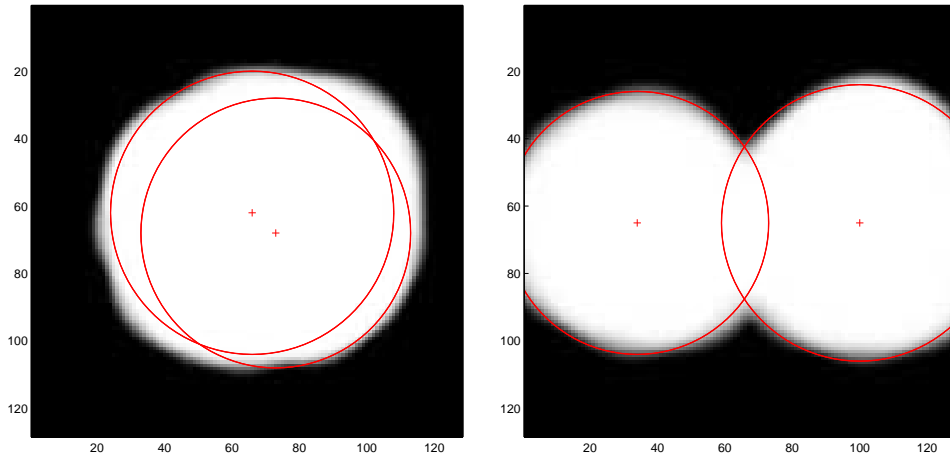


FIG. 3 – *A gauche : Cas de superposition à éviter, les deux cercles détectant le même objet. A droite : Superposition acceptable, deux objets distincts étant délimités.*

Cette dernière définition nous permet ainsi de caractériser, pour chaque objet  $u$  d'une configuration, le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  où sa silhouette intersecte celle de son voisinage.

### Différentes modélisations des interactions

D'après ce qui a été dit auparavant, nous devons veiller à ce que deux cercles de notre configuration ne se superposent pas trop. Il faut éviter d'attribuer le même poids à toutes les interactions entre les objets afin de permettre les faibles interactions au détriment des plus grandes. Un processus d'interaction d'aires semble indiqué : ce processus s'intéresse aux aires de l'intersection des différents objets de la configuration. La densité a priori s'écrit alors :

$$h_p(\mathbf{x}) = e^{-\gamma_a \mathcal{A}_i(\mathbf{x})} \quad (14)$$

avec  $\gamma_a$  positif pour induire une répulsion, et  $\mathcal{A}_i(\mathbf{x})$  une fonction de  $\mathbf{x}$  qu'il reste à déterminer.

Différents modèles d'interaction d'aires sont envisageables. Tout d'abord, un premier modèle consiste à s'intéresser aux paires d'objets en interaction, et à pénaliser ces aires d'intersection :

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{x}) = \sum_{x_i \sim_I x_j} \lambda_2(\mathbb{S}_{\mathcal{P}}(x_i) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{P}}(x_j)) \quad (15)$$

Un second modèle consiste à ne pénaliser pour chaque objet que la plus forte interaction qu'il a avec les autres objets de la configuration  $\mathbf{x}$  :

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} \max_{v \in \mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}}(u)} (\lambda_2(\mathbb{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{P}}(v))) \quad (16)$$

Enfin, un troisième modèle consiste à pénaliser l'aire de l'ensemble d'intersection de chaque objet dans la configuration  $\mathbf{x}$  :

$$\mathcal{A}_3(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} \lambda_2(\cap_{\mathbf{x}}(u)) \quad (17)$$

Le modèle d'interaction d'aires  $\mathcal{A}_i(\mathbf{x})$  sera choisi par la suite parmi les trois présentés ci-dessus.

#### 4.2.4 Terme d'attaches aux données $\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})$

On rappelle que le terme de vraisemblance  $\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})$  correspond à la probabilité, étant donnée une configuration d'objets  $\mathbf{x}$ , d'observer une image  $\mathcal{J}$ . Travaillant sur des images discrètes dans [14] et [15], H. Rue fait de l'inférence bayésienne à l'aide de processus ponctuels simulés par des chaînes de Markov. Son terme de vraisemblance consiste à distinguer deux classes de pixels dans l'image, selon qu'ils sont ou non contenus dans un des objets de son processus, chacune des classes ayant des propriétés distinctes.

Nous utiliserons la même démarche pour notre attache aux données, qui sera par conséquent une attache au niveau pixélique, tout en gardant cette notion d'objet. Se posent alors le problème de la discrétisation, ainsi que celui de la formulation des classes de pixels utiles au calcul de cette vraisemblance.

#### Problème de la discrétisation

L'image de données étant discrète, et les objets de la configuration définis sur un espace  $U$  continu (plus exactement, c'est la continuité de  $\mathcal{P}$  qui nous intéresse ici), il nous faut définir une relation d'attache entre un objet défini sur  $U$ , et son représentant sur l'image. Dans la pratique, l'espace des positions est  $\mathcal{P} = [0, X_M] \times [0, Y_M]$ , avec  $X_M$  et  $Y_M$  entiers, correspondant à la largeur et la hauteur de l'image.

On peut visualiser l'ensemble de ces positions sur l'image en se munissant d'un repère orthonormé avec pour origine le coin en haut à gauche. Ainsi donc, le pixel  $p = \{i, j\}$ ,  $0 \leq i < X_M$ ,  $0 \leq j < Y_M$ , de la  $i^{\text{ème}}$  colonne et de la  $j^{\text{ème}}$  ligne, recouvre le sous-ensemble  $[i, i+1] \times [j, j+1]$  de  $\mathcal{P}$ . Ces notations sont reprises dans le schéma récapitulatif de la Fig. (4). Soit alors  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  une configuration d'objets, pour chacun de ses composants  $x_i$ , on souhaite définir la notion de représentant sur l'image.

#### Définition 4.3

Soit  $p$  un pixel  $\{i, j\}$ . Le **centre du pixel**  $p$  est le point central de  $p$  dans l'espace des positions  $\mathcal{P}$ , c'est à dire  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ .

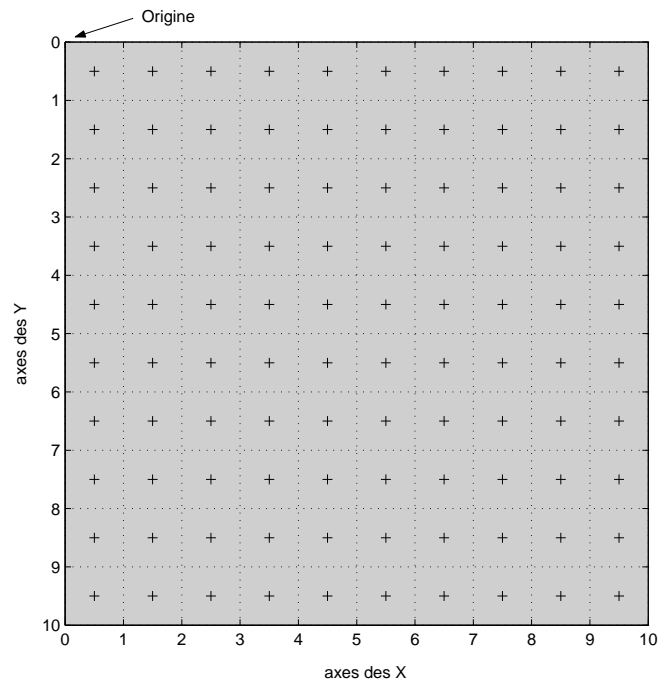


FIG. 4 – Repère de  $\mathcal{P}$  sur la matrice d'une image  $\mathcal{I}$  de taille  $10 \times 10$ . Le quadrillage sépare les pixels de l'image  $\mathcal{I}$ , et les croix représentent les centres de chacun des pixels.

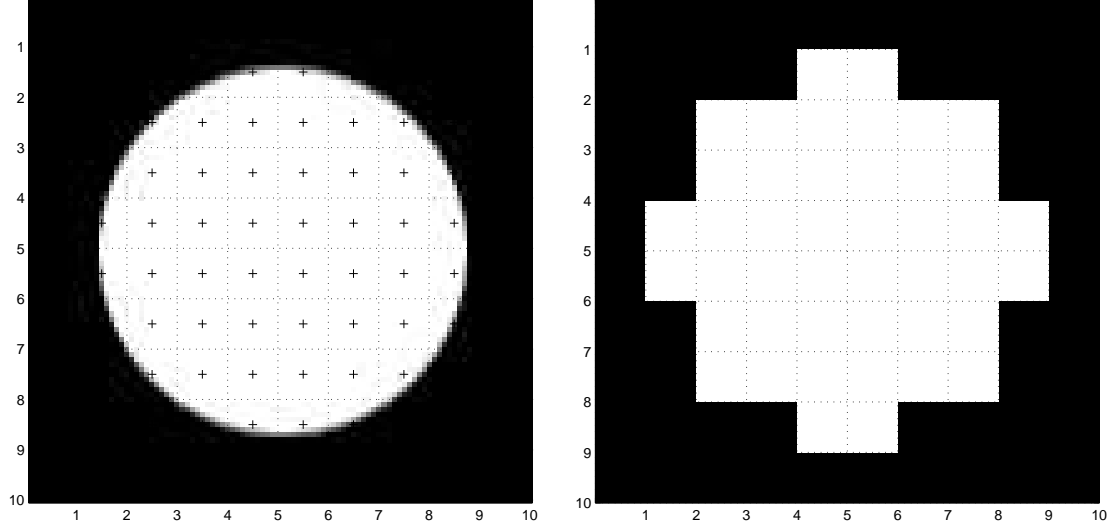


FIG. 5 – *A gauche : objet dans l'espace continu des positions, placé sur la grille de l'image. A droite : représentant discret de l'objet.*

#### Définition 4.4

On appelle **représentant sur l'image**  $\mathcal{J}$  de  $x_i = (X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i})$ , l'ensemble  $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}(x_i)$  des pixels  $p_{k,l} = \{k,l\}$  de  $\mathcal{J}$  ayant leur centre dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(x_i)$ , la silhouette de  $x_i$  :

$$\left(k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(x_i) \implies p_{k,l} \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}(x_i).$$

La Fig. (5) donne un exemple d'objet et de son représentant sur l'image. La discrétisation des données, notamment sur des objets de petite taille comme des arbres (sur une image de résolution 0.5m), altère significativement les propriétés géométriques de nos objets. Nous nous sommes limités à des processus de disques dans un premier temps, mais sans doute qu'une forme elliptique sera plus adaptée dans nos applications futures.



### Définition des classes de pixels

On peut alors attribuer à chacun des pixels de l'image  $\mathcal{J}$  une appartenance à une des deux classes suivantes, qui réalisent une partition de  $\mathcal{J}$  :

- **La classe des arbres**  $\mathcal{C}_A$  : un pixel appartient à  $\mathcal{C}_A$  s'il appartient à un des représentants  $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}(x_i)$  des objets de la configuration  $\mathbf{x}$  :

$$\mathcal{C}_A = \bigcup_{x_i \in \mathbf{x}} \mathcal{T}_{\mathcal{J}}(x_i).$$

- **La classe du fond**  $\mathcal{C}_F$  : un pixel appartient à  $\mathcal{C}_F$  s'il n'appartient pas à la classe des arbres.

La bande proche infrarouge séparant nettement le niveau de gris des arbres (chlorophylliens) et du fond, on décide de modéliser chacune de ces classes par une distribution normale de ses niveaux de gris :

$$\mathcal{C}_A : \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A) \text{ et } \mathcal{C}_F : \mathcal{N}(\mu_F, \sigma_F) \quad (18)$$

Ainsi, la vraisemblance de la classification d'un pixel  $p$  de niveau de gris  $y_p$  sur  $\mathcal{J}$  est :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(p \in \mathcal{C}_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left(\frac{-(y_p - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2}\right) \\ \mathbb{P}(p \in \mathcal{C}_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_F} \exp\left(\frac{-(y_p - \mu_F)^2}{2\sigma_F^2}\right) \end{cases}$$

Ce modèle pourrait tout à fait être développé si on avait plusieurs espèces d'arbres différentes. Cependant, les distributions gaussiennes des niveaux de gris risqueraient de se confondre, et l'évaluation de la vraisemblance serait faussée. L'information donnée par les niveaux de gris est donc très faible. Il nous faudra par la suite, lorsque nous étudierons des images comportant différentes espèces d'arbres, **établir une signature robuste de chacune de ces espèces**, en calculant par exemple certains **attributs de texture**.

La vraisemblance de l'image  $\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})$ , en supposant les pixels indépendants conditionnellement à leur appartenance à une classe donnée, est donc :

$$\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x}) = \prod_{p \in \mathcal{C}_A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left(\frac{-(y_p - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2}\right) \prod_{p \in \mathcal{C}_F} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_F} \exp\left(\frac{-(y_p - \mu_F)^2}{2\sigma_F^2}\right). \quad (19)$$

#### 4.2.5 Stabilité du processus

L'intensité conditionnelle de Papangelou se calcule pour notre modèle de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \lambda^*(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{h(\mathbf{x} \cup \{\xi\})}{h(\mathbf{x})} = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x} \cup \{\xi\})}{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})} \frac{h_p(\mathbf{x} \cup \{\xi\})}{h_p(\mathbf{x})} \\
 &= \frac{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x} \cup \{\xi\})}{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})} e^{-\gamma_a[\mathcal{A}_i(\mathbf{x} \cup \{\xi\}) - \mathcal{A}_i(\mathbf{x})]} \\
 &= \frac{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x} \cup \{\xi\})}{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})} e^{-\gamma_a \Delta \mathcal{A}_i(\mathbf{x}, \xi)}
 \end{aligned}$$

Nous rappelons que la **majoration de cette intensité conditionnelle de Papangelou** est une **condition suffisante de convergence** de l'algorithme de Green [2, 5] (ne comportant que le noyau de naissance/mort), mais nous souhaitons, en outre, imposer une **condition supplémentaire** à notre modèle, la **majoration de l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou** (autrement dit, la minoration de cette intensité par un terme strictement positif). Cette condition nous sera utile pour prouver la validité d'un mouvement du noyau de propositions, c'est à dire la convergence de l'algorithme A avec ce noyau. C'est pourquoi nous allons vérifier ces deux propriétés pour chacun des modèles d'interaction d'aires  $\mathcal{A}_i(\mathbf{x})$ .

#### Majoration de l'intensité conditionnelle de Papangelou

D'une part, remarquons que la vraisemblance  $\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})$  est majorée et minorée par  $\mathcal{L}_{min}$  et  $\mathcal{L}_{max}$  définis de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_{min} = \prod_{p \in \mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_F} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \max(\sigma_A, \sigma_F)} \exp \left( \frac{-\max(|y_p - \mu_A|, |y_p - \mu_F|)^2}{2 \min(\sigma_A, \sigma_F)^2} \right) > 0 \quad (20)$$

et

$$\mathcal{L}_{max} = \prod_{p \in \mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_F} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \min(\sigma_A, \sigma_F)} \exp \left( \frac{-\min(|y_p - \mu_A|, |y_p - \mu_F|)^2}{2 \max(\sigma_A, \sigma_F)^2} \right) > 0. \quad (21)$$

D'autre part, l'intensité conditionnelle de Papangelou du terme a priori  $h_p(\cdot)$  est majorée puisque pour nos trois modèles,  $\Delta \mathcal{A}_i(\mathbf{x}, \xi) \geq 0$ . On obtient donc :

$$\lambda^*(\mathbf{x}, \xi) \leq \frac{\mathcal{L}_{max}}{\mathcal{L}_{min}} = M_h, \forall \xi \in \{U - \bigcup_{i=1}^{n(\mathbf{x})} x_i\} \quad (22)$$

Cette dernière équation nous assure la stabilité locale du processus, et donc les bonnes propriétés de la chaîne de Markov qui le simule.

### Majoration de l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou

Récrivons l'inverse de la densité de Papangelou :

$$\frac{1}{\lambda^*(\mathbf{x}, \xi)} = \frac{h(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x} \cup \{\xi\})} = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})}{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x} \cup \{\xi\})} e^{\gamma_a \Delta \mathcal{A}_i(\mathbf{x}, \xi)} \quad (23)$$

D'après les majoration et minoration de la vraisemblance, on a déjà :

$$\frac{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})}{\mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x} \cup \{\xi\})} \leq \frac{\mathcal{L}_{max}}{\mathcal{L}_{min}}, \forall \xi \in \{U - \bigcup_{i=1}^{n(\mathbf{x})} x_i\}. \quad (24)$$

Il nous reste à essayer de majorer l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou de la densité a priori  $h_p(\mathbf{x})$  pour chacun des trois modèles d'interaction d'aires proposés. Cela équivaut à majorer le terme  $\Delta \mathcal{A}_i(\mathbf{x}, \xi)$ .

#### 1. Modèle 1 : $\Delta \mathcal{A}_1(\mathbf{x}, \xi)$

Notre objectif est de prouver, contre-exemple à l'appui, que nous ne pouvons pas majorer l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou de  $h_p(\mathbf{x})$ , ou de façon équivalente majorer  $\Delta \mathcal{A}_1(\mathbf{x}, \xi)$ . Autrement dit :

$$\forall M > 0, \exists (\mathbf{x}, \xi) \in \Psi \times U \text{ tels que } \Delta \mathcal{A}_1(\mathbf{x}, \xi) > M.$$

Supposons que les espaces  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{K}$  soient tels qu'un objet de marque maximale  $R_M$  puisse être positionné dans  $\mathcal{P}$  sans que sa silhouette n'intersecte les bords. Cette hypothèse peut se formuler ainsi :  $X_M \geq 2R_M$  et  $Y_M \geq 2R_M$ . Elle n'est pas essentielle, mais simplifie les notations. On appelle  $\xi = (X, Y, R_M)$  un tel objet, et suite à une translation du repère, que l'on centre en  $(X, Y)$ , on a  $\xi = (0, 0, R_M)$ .

Puis, on crée quatre objets de marque minimale  $R_m$  dont la silhouette est contenue dans celle de  $\xi$ . Ces objets, représentés sur la Fig. (6), sont :

$$\begin{cases} x_{nord} &= (0, R_M - R_m, R_m) \\ x_{sud} &= (0, R_m - R_M, R_m) \\ x_{est} &= (R_M - R_m, 0, R_m) \\ x_{ouest} &= (R_m - R_M, 0, R_m) \end{cases}$$

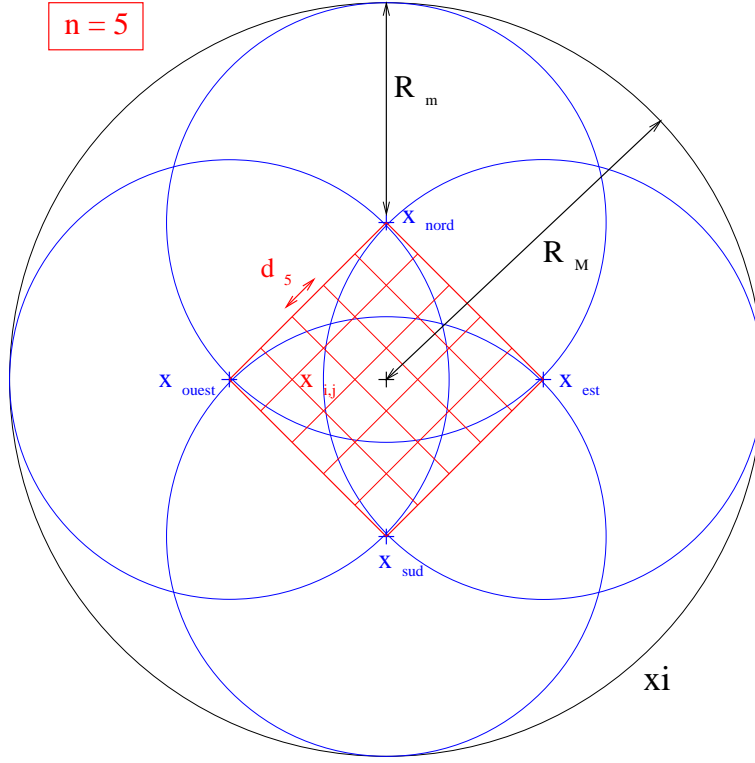


FIG. 6 – Description du contre-exemple, avec  $R_m = 7$ ,  $R_M = 12$ , et  $n = 5$ .

Les centres de ces objets sont les sommets d'un carré dans  $\mathcal{P}$ , sur lequel on définit un maillage uniforme de dimension  $n \times n$ . Sur chacun des  $(n+1)^2$  sommets de ce maillage, on place un objet  $x_{i,j}$ ,  $(i,j) \in [1,n+1]^2$ , de marque  $R_m$ . On a par exemple  $x_{nord} = x_{1,1}$ ,  $x_{sud} = x_{n+1,n+1}$ ,  $x_{est} = x_{1,n+1}$  et  $x_{ouest} = x_{n+1,1}$ .

Notons que la distance minimale entre deux objets, qui est aussi la distance caractéristique de ce maillage, est  $d_n = \frac{\sqrt{2}(R_M - R_m)}{n}$ . Notons d'autre part que pour les  $n$  pairs, l'un des points du maillage est le centre du repère, c'est à dire  $x_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = (0,0,R_m)$ . Nous travaillerons donc par la suite avec des  $n$  impairs afin d'éviter que l'un des objets du maillage ait la même position que  $\xi$ , puisque

notre processus sur  $\mathcal{P}$  doit être simple.

On appelle  $\mathbf{x}_n$  la configuration composée de ces  $(n+1)^2$  objets. On se propose alors de calculer  $\Delta\mathcal{A}_1(\mathbf{x}_n, \xi)$ . Le fait de rajouter l'objet  $\xi$  à la configuration  $\mathbf{x}_n$  crée  $(n+1)^2$  nouvelles cliques puisque  $\xi \sim_I x_{i,j} \forall (i,j) \in [1, n+1]^2$ . D'après (15) :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{A}_1(\mathbf{x}_n, \xi) &= \sum_{u \in \mathbf{x}_n} \lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u)) \\ &= (n+1)^2 \pi R_m^2. \end{aligned}$$

Ce terme n'est pas majoré. Il est impossible de majorer l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou avec le premier modèle d'interaction d'aires, puisque :

$$\forall M > 0, \exists (\mathbf{x}_n, \xi) \in \Psi \times U, n = \sqrt{\frac{M}{\pi R_m^2}}, \text{ tels que } \Delta\mathcal{A}_1(\mathbf{x}_n, \xi) > M. \quad (25)$$

## 2. Modèle 2 : $\Delta\mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \xi)$

A partir du même contre-exemple, nous allons montrer qu'il est impossible de majorer  $\Delta\mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \xi)$ . D'après (16) :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{A}_2(\mathbf{x}_n, \xi) &= \max_{v \in \mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(\xi)} (\lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v))) \\ &\quad + \sum_{u \in \mathbf{x}_n} \underbrace{\max_{v \in \mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(u)} (\lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v)))}_{= \lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi)) = \lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u))} \\ &\quad - \sum_{u \in \mathbf{x}_n} \max_{v \in \mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}_n}(u)} (\lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v))) \end{aligned}$$

Dans la configuration  $\mathbf{x}_n$ , tout objet possède au moins 1 plus proche voisin sur le maillage, avec lequel l'aire d'intersection des silhouettes est maximale. En notant  $A$  l'aire d'intersection de ces deux objets de la configuration, distants de  $d_n$ , on obtient :

$$\Delta\mathcal{A}_2(\mathbf{x}_n, \xi) = \pi R_m^2 + (n+1)^2 \pi R_m^2 - (n+1)^2 A$$

Avec les notations de la Fig. (7), on peut exprimer  $A$  en fonction des variables

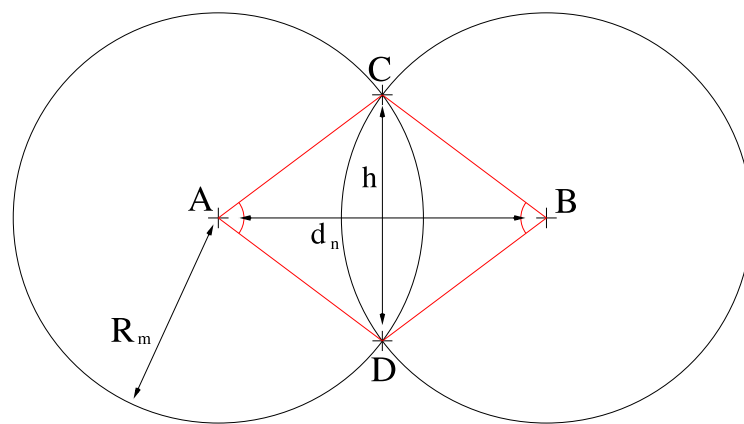


FIG. 7 – Calcul de l'intersection de deux cercles de même rayon.

du problème, en posant  $K = \frac{R_M - R_m}{\sqrt{2}R_m}$  :

$$\begin{aligned} A &= R_m^2 \left( \frac{\widehat{CAD} + \widehat{CBD}}{2} \right) - \frac{d_n h}{2} \\ &= R_m^2 \left( 2 \arccos \left( \frac{K}{n} \right) - \sin(\widehat{CBD}) \right) \end{aligned}$$

Puis, comme  $\sin(\widehat{CBD}) > 0$  et  $\pi R_m^2 > 0$ , on peut écrire :

$$\Delta \mathcal{A}_2(\mathbf{x}_n, \xi) > (n+1)^2 R_m^2 \left( \pi - 2 \arccos \left( \frac{K}{n} \right) \right). \quad (26)$$

Montrons que le terme de droite de (26) tend vers l'infini quand  $n \rightarrow +\infty$ . Pour ce faire, on écrit le développement limité de la fonction  $\arccos \left( \frac{K}{n} \right)$  à l'ordre 2 en  $\frac{1}{n}$ , ce qui nous mène à :

$$\begin{aligned} (n+1)^2 R_m^2 \left( \pi - 2 \arccos \left( \frac{K}{n} \right) \right) &= (n+1)^2 R_m^2 \left( \frac{2K}{n} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= (2K R_m^2)(n+2) + o(1) \end{aligned}$$

Ce terme n'est pas majoré quand  $n \rightarrow +\infty$ . (26) nous permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta \mathcal{A}_2(\mathbf{x}_n, \xi) = +\infty \quad (27)$$

Il est donc impossible de majorer l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou avec le second modèle d'interaction d'aire.

Nous avons montré qu'aucun des deux premiers modèles d'interaction d'aires proposés n'assurait la minoration de l'intensité conditionnelle de Papangelou par un terme strictement positif.

### 3. Modèle 3: $\Delta \mathcal{A}_3(\mathbf{x}, \xi)$

Cette fois, nous allons démontrer que l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou est majorée. Comme pour les deux modèles précédents, nous allons nous intéresser au terme  $\Delta \mathcal{A}_3(\mathbf{x}, \xi)$  et montrer qu'il est majoré. D'après (17) :

$$\Delta \mathcal{A}_3(\mathbf{x}_n, \xi) = \underbrace{\lambda_2(\cap_{\mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(\xi))}_{g_1(\mathbf{x}_n, \xi)} + \underbrace{\sum_{u \in \mathbf{x}} [\lambda_2(\cap_{\mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(u)) - \lambda_2(\cap_{\mathbf{x}_n}(u))]}_{g_2(\mathbf{x}_n, \xi)}$$

avec

$$g_1(\mathbf{x}_n, \xi) \leq \lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi)) \leq \pi R_M^2 \quad (28)$$

puisque  $\cap_{\mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(\xi) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi)$ , et

$$g_2(\mathbf{x}_n, \xi) = \sum_{u \in \mathbf{x}_n} \lambda_2 \left( \underbrace{\cap_{\mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(u) \setminus \cap_{\mathbf{x}_n}(u)}_{A_u} \right)$$

puisque  $\cap_{\mathbf{x}_n}(u) \subset \cap_{\mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(u)$ .

**Lemme 4.5 :**

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les ensembles } A_u \text{ vérifient les deux propriétés suivantes :} \\ - \forall u \in \mathbf{x}_n, A_u \subset \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi) \\ - \text{les ensembles } A_u \text{ sont disjoints : } A_u \cap A_v = \{\emptyset\}, u \neq v \end{array} \right.$$

◇ **Démonstration :**

$\forall u \in \mathbf{x}_n$  tel que  $A_u \neq \{\emptyset\}$ ,  $\forall x \in A_u$ , d'après la définition de  $A_u$  :

$$x \in A_u \subset \cap_{\mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(u) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathcal{V}_{\sim_I, \mathbf{x}_n \cup \{\xi\}}(u))$$

Donc  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u)$ , et  $\exists v \in \mathbf{x}_n \cup \{\xi\}$ ,  $v \neq u$ , tel que  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v)$ . Montrons que cet objet  $v$ , voisin de  $u$ , ne peut être que  $\xi$ , en raisonnant par l'absurde.

Si  $v \neq \xi$ , alors  $x \in (\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v)) \subset \cap_{\mathbf{x}_n}(u) \implies x \in \cap_{\mathbf{x}_n}(u)$ . Par définition des ensembles  $A_u$ , on a aussi  $x \notin \cap_{\mathbf{x}_n}(u)$ , ce qui est contradictoire. Ainsi, le seul objet  $v$  possible est  $\xi$  lui-même, et on a bien  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi)$ , ce qui démontre la première propriété.

Nous venons de montrer que  $\forall v \in \mathbf{x}_n$  tel que  $v \neq u$ ,  $x \notin \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v)$ . Or,  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(v) \supset A_v$ , et donc  $x \notin A_v$ . Ceci démontre la seconde propriété.

◇

D'après le lemme précédent, les ensembles  $A_u$  étant disjoints deux à deux et contenus dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi)$ ,

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{x}_n, \xi) &= \sum_{u \in \mathbf{x}_n} \lambda_2(A_u) = \lambda_2 \left( \bigcup_{u \in \mathbf{x}_n} A_u \right) \\ &\leq \lambda_2(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\xi)). \end{aligned}$$



Un majorant de  $g_2(\mathbf{x}_n, \xi)$  est dans ce cas :

$$g_2(\mathbf{x}_n, \xi) \leq \pi R_M^2. \quad (29)$$

(28) et (29) nous permettent de conclure sur la majoration de  $\Delta\mathcal{A}_3(\mathbf{x}_n, \xi)$  :

$$\Delta\mathcal{A}_3(\mathbf{x}_n, \xi) \leq 2\pi R_M^2. \quad (30)$$

Contrairement aux deux modèles précédents, le troisième modèle d'interaction d'aires a son intensité conditionnelle de Papangelou majorée **et** minorée par un terme strictement positif :

$$0 < m_h \leq \lambda^*(\mathbf{x}, \xi) \leq M_h < +\infty. \quad (31)$$

C'est donc ce modèle que nous choisissons.

### 4.3 Choix de l'estimateur

On cherche une estimée de la configuration d'objets qui correspond le mieux à notre image, c'est à dire la configuration qui minimise l'espérance d'une fonction de coût suivant la loi a posteriori. Dans notre modèle, nous avons choisi comme estimateur le **maximum a posteriori** (MAP), la fonction de coût qui lui est associée étant :

$$\mathcal{L}_{MAP}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'estimateur de Bayes est la configuration qui maximise la densité a posteriori :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{x}} (h(\mathbf{x}|\mathcal{I})) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}} (h(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Dans la pratique, pour obtenir la configuration qui maximise la densité a posteriori  $h(\cdot)$ , on utilise un **recuit simulé**. Son principe est de simuler une chaîne de Markov de densité objectif non plus  $h(\cdot)$ , mais  $h(\cdot)^{\frac{1}{T_k}}$ , où  $T_k$  décroît vers 0 quand le nombre d'itérations augmente.

Afin de contrôler la dynamique de l'algorithme, on rajoute un terme  $\beta^{n(\mathbf{x})}$  à la mesure du processus de Poisson de référence  $\mu(\cdot)$ , qu'il pondère. L'expression de la loi objectif  $\pi(\cdot)$  à une température  $T_k$  est alors :

$$\pi_{T_k}(d\mathbf{x}) = e^{-\frac{\gamma_a \mathcal{A}_3(\mathbf{x})}{T_k}} \mathcal{L}(\mathcal{J}|\mathbf{x})^{\frac{1}{T_k}} \beta^{n(\mathbf{x})} \mu(d\mathbf{x}). \quad (32)$$

Ainsi, cela revient à faire évoluer  $h(\cdot)$  en dirac au niveau de ses modes principaux. La décroissance vers 0 de la température nous assure de trouver le maximum de la densité a posteriori. Cependant, de fortes conditions sur la vitesse de décroissance des températures  $T_k$  sont nécessaires pour s'assurer de la convergence de l'algorithme de recuit simulé. Une décroissance logarithmique :

$$T_k = \frac{a}{\ln(k+1)}$$

convient pour assurer cette convergence mais est trop lente pour être implantée. Lors des simulations sur ordinateur, nous lui préférons une décroissance géométrique, ce qui nous fait sortir du cadre théorique de la convergence, mais donne en pratique des résultats corrects :

$$T_{k+1} = (1-a).T_k, a \ll 1.$$

## 5 Composition du noyau de propositions

Dans cette partie, nous présentons les mouvements de la chaîne de Markov de notre algorithme MCMC à sauts réversibles. Nous distinguons les mouvements simples, qui affectent un des objets de la configuration courante, des mouvements complexes, qui changent la dimension de la configuration. Parmi ces mouvements complexes, nous distinguerons le noyau classique de naissance/mort du noyau de fusion/division d'objets.

### 5.1 Mouvements simples

Les mouvements simples affectent un objet de la configuration courante selon une transformation symétrique. Ils reviennent à combiner une mort et une naissance, et font donc gagner du temps à l'algorithme qui n'a plus besoin de proposer et d'accepter ces deux mouvements, mais juste un seul. Dans notre modèle, ils proposent à un objet de le traduire, de changer sa marque, ou les deux.

### 5.1.1 Translation

Soit  $x_i = (X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i}) \in \mathbf{x}$ . Le mouvement de translation propose de modifier ses coordonnées  $(X_{x_i}, Y_{x_i})$  dans  $\mathcal{P}$ . Pour cela, nous introduisons une variable aléatoire  $\theta = (\theta_X, \theta_Y)$  uniformément distribuée sur un compact symétrique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Theta = [-a_X, a_X] \times [-b_Y, b_Y]$ , et nous notons  $T_\tau(x_i)$  l'objet résultant de cette transformation défini par :

$$T_\tau \left( \begin{bmatrix} X_{x_i} \\ Y_{x_i} \\ R_{x_i} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_{x_i} + \theta_X \\ Y_{x_i} + \theta_Y \\ R_{x_i} \end{bmatrix}.$$

Ce mouvement est illustré dans la Fig. (8).

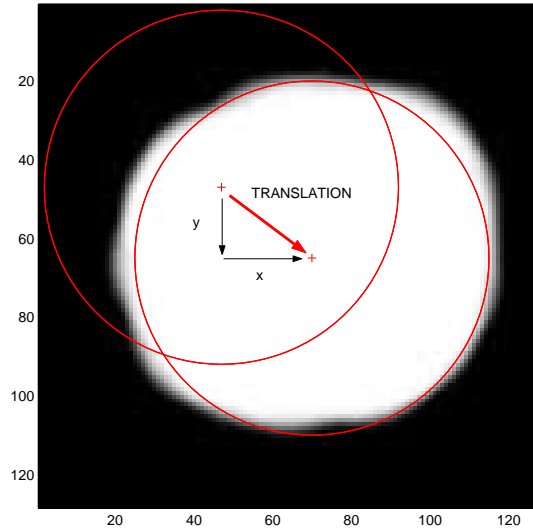


FIG. 8 – *Mouvement de translation*

### 5.1.2 Homothétie

Soit  $x_i = (X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i}) \in \mathbf{x}$ . Le mouvement d'homothétie propose de modifier sa coordonnée  $R_{x_i}$  dans  $\mathcal{K}$ . Pour cela, nous introduisons une variable aléatoire  $\theta$  uniformément distribuée sur un compact symétrique de  $\mathbb{R}$ ,  $\Theta = [-c_R, c_R]$ , et nous

notons  $T_\delta(x_i)$  l'objet résultant de cette transformation défini par :

$$T_\delta \left( \begin{bmatrix} X_{x_i} \\ Y_{x_i} \\ R_{x_i} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_{x_i} \\ Y_{x_i} \\ R_{x_i} + \theta \end{bmatrix}.$$

Ce mouvement est illustré dans la Fig. (9).

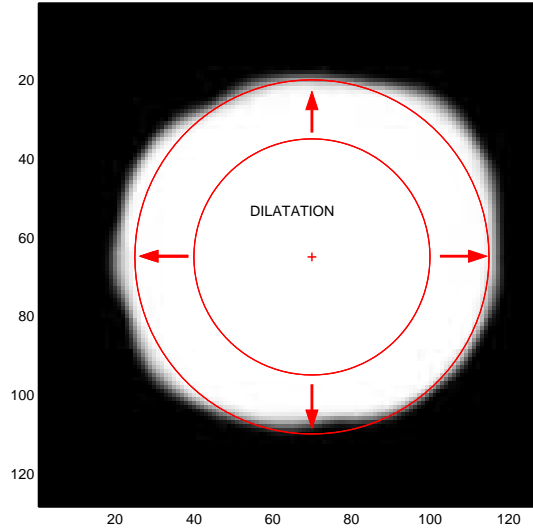


FIG. 9 – Mouvement d'homothétie : exemple d'une dilatation

### 5.1.3 Translation et Homothétie

Soit  $x_i = (X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i}) \in \mathbf{x}$ . Le mouvement de translation/homothétie est le composé des deux mouvements de translation et d'homothétie. Il propose de modifier à la fois la position, mais aussi la marque de l'objet. Nous introduisons pour cela une variable aléatoire  $\theta = (\theta_X, \theta_Y, \theta_R)$  uniformément distribuée sur  $\Theta = [-a_X, a_X] \times [-b_Y, b_Y] \times [-c_R, c_R]$ . Nous notons  $T_{\tau\delta}(x_i)$  l'objet résultant de cette transformation défini par :

$$T_{\tau\delta} \left( \begin{bmatrix} X_{x_i} \\ Y_{x_i} \\ R_{x_i} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_{x_i} + \theta_X \\ Y_{x_i} + \theta_Y \\ R_{x_i} + \theta_R \end{bmatrix}.$$

Ce mouvement est illustré dans la Fig. (10).

#### 5.1.4 Noyaux de propositions et mesure symétrique

Pour chacune des transformations simples décrites précédemment, les noyaux de propositions sont semblables. On les note respectivement  $Q_\tau(.,.)$  pour la translation,  $Q_\delta(.,.)$  pour l'homothétie, et  $Q_{\tau\delta}(.,.)$  pour la transformation de translation/homothétie. Soient alors  $\mathbf{x} \in \Psi$ ,  $A \in \mathcal{B}(\Psi)$ ,  $\lambda_i(.)$  la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^i$  ( $i = \{1,2,3\}$  selon le mouvement) et  $\star$  un symbole désignant  $\tau$ ,  $\delta$  et  $\tau\delta$ , ces noyaux s'expriment de la façon suivante :

$$Q_\star(\mathbf{x}, A) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{1}{n(\mathbf{x})} \int_{\theta \in \Theta} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \cup \{T_\star(x_i)\} \setminus \{x_i\}) \frac{\lambda_i(d\theta)}{\lambda_i(\Theta)}. \quad (33)$$

La mesure symétrique  $\xi_\star(.,.)$  définie sur  $\Psi \times \Psi$ , par rapport à laquelle  $\pi(.)Q_\star(.,.)$  est absolument continu, se définit par :

$$\xi_\star(A, B) = \int_{\Psi} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \int_{\theta \in \Theta} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \cup \{T_\star(x_i)\} \setminus \{x_i\}) \lambda_i(d\theta) \mu(d\mathbf{x}). \quad (34)$$

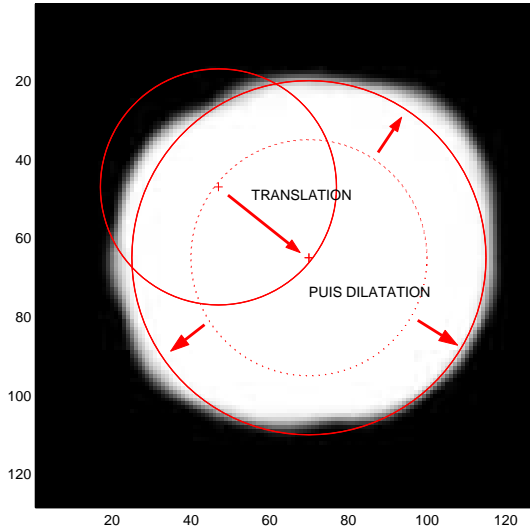


FIG. 10 – *Mouvement de translation/homothétie*

En posant  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup \{T_\star(x_i)\} \setminus \{x_i\}$ , on peut calculer la dérivée de Radon Nikodym  $f_\star(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  associée à ces mouvements simples :

$$f_\star(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi(d\mathbf{x})Q_\star(\mathbf{x}, d\mathbf{y})}{\xi_\star(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})} = \frac{h(\mathbf{x})}{n(\mathbf{x})\lambda_i(\Theta)}. \quad (35)$$

On en déduit les taux d'acceptation de ces mouvements :

$$\alpha_\star(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\left(1, \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x})}\right) \quad (36)$$

## 5.2 Noyau de propositions de Naissance/Mort

### 5.2.1 Calcul des noyaux de propositions

Se limiter à ce noyau aurait été suffisant pour converger vers notre mesure objectif  $\pi(\cdot)$ . Les autres mouvements sont modélisés dans le seul but d'accélérer la convergence. On considère un noyau de propositions  $Q_{nm}(\cdot, \cdot)$ , composé lui-même de deux noyaux, l'un proposant une naissance avec une probabilité  $p_n$ , et l'autre une mort avec la probabilité complémentaire  $p_m$  :

$$Q_{nm}(\mathbf{x}, \cdot) = p_n Q_n(\mathbf{x}, \cdot) + p_m Q_m(\mathbf{x}, \cdot) \quad (37)$$

Dans le cas d'une naissance, on choisit  $\nu$ -uniformément un objet  $u \in U$  et on propose de l'ajouter à la configuration courante  $\mathbf{x}_t$ . Soit  $A$  un borélien de  $\mathcal{B}(\Psi)$ , le noyau  $Q_n$  est donc :

$$Q_n(\mathbf{x}_t, A) = \int_{u \in U} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}_t \cup \{u\}) \frac{\nu(du)}{\nu(U)} \quad (38)$$

Dans le cas d'une mort, on choisit équiprobablement un objet  $u \in \mathbf{x}_t$ , et on propose de le supprimer. L'expression du noyau  $Q_m$  est :

$$Q_m(\mathbf{x}_t, A) = \sum_{u \in \mathbf{x}_t} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}_t \setminus \{u\}) \frac{1}{n(\mathbf{x}_t)} \quad (39)$$

Dans le cas particulier d'une configuration vide, n'ayant pas d'objet à tuer, on considère que le noyau de mort est l'identité.

### 5.2.2 Mesure symétrique et dérivée de Radon Nikodym

Il nous reste à trouver une mesure symétrique  $\xi_{nm}(\cdot, \cdot)$  sur  $\Psi \times \Psi$  par rapport à laquelle  $\pi(\cdot)Q_{nm}(\cdot, \cdot)$  est absolument continu. Soient alors  $A, B \in \mathcal{B}(\Psi)$ . Si ni une

naissance ni une mort n'est possible pour passer de  $A$  à  $B$ , alors  $\xi_{nm}(A, B)$  peut être nul puisque dans ce cas  $\pi(\cdot)Q_{nm}(\cdot, \cdot) = 0$ . On propose la mesure suivante :

$$\xi_{nm}(A, B) = \int_{\Psi} \int_{u \in U} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \cup \{u\}) \nu(du) \mu(d\mathbf{x}) + \int_{\Psi} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \setminus \{u\}) \mu(d\mathbf{x}). \quad (40)$$

Cette mesure est bien symétrique [11], et nous mène au calcul des dérivées de Radon Nikodym  $f_{nm}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \cup \{u\})$  pour la naissance et  $f_{nm}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \setminus \{u\})$  pour la mort :

$$f_{nm}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \cup \{u\}) = \frac{\pi(d\mathbf{x}_t) Q_{nm}(\mathbf{x}_t, d(\mathbf{x}_t \cup \{u\}))}{\xi_{nm}(d\mathbf{x}_t, d(\mathbf{x}_t \cup \{u\}))} = \frac{h(\mathbf{x}_t) p_n}{\nu(U)} \quad (41)$$

$$f_{nm}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \setminus \{u\}) = \frac{\pi(d\mathbf{x}_t) Q_{nm}(\mathbf{x}_t, d(\mathbf{x}_t \setminus \{u\}))}{\xi_{nm}(d\mathbf{x}_t, d(\mathbf{x}_t \setminus \{u\}))} = \frac{h(\mathbf{x}_t) p_m}{n(\mathbf{x}_t)} \quad (42)$$

### 5.2.3 Taux d'acceptation des mouvements de naissance et de mort

On déduit de (41) et (42) les taux d'acceptation des deux mouvements :

$$\alpha_n(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \cup \{u\}) = \min \left( 1, \frac{p_n}{p_m} \frac{h(\mathbf{x}_t \cup \{u\})}{h(\mathbf{x}_t)} \frac{\nu(U)}{n(\mathbf{x}_t) + 1} \right) \quad (43)$$

et

$$\alpha_m(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \setminus \{u\}) = \min \left( 1, \frac{p_n}{p_m} \frac{h(\mathbf{x}_t \setminus \{u\})}{h(\mathbf{x}_t)} \frac{n(\mathbf{x}_t)}{\nu(U)} \right) \quad (44)$$

## 5.3 Noyau de propositions de Fusion/Division

On considère un noyau de propositions  $Q_{fd}(\cdot, \cdot)$ , composé lui-même de deux noyaux, l'un proposant une fusion avec une probabilité  $p_f$ , et l'autre une division avec la probabilité complémentaire  $p_d$  :

$$Q_{fd}(\mathbf{x}, \cdot) = p_f Q_f(\mathbf{x}, \cdot) + p_d Q_d(\mathbf{x}, \cdot) \quad (45)$$

A partir de la configuration courante  $\mathbf{x}_t$ , une fusion consiste à supprimer deux objets  $x_i$  et  $x_j$  de  $\mathbf{x}_t$ , voisins au sens de la relation  $\sim_I$ , et à ajouter à la configuration un nouvel objet  $u \in U$  obtenu à partir des deux objets supprimés. Une division consiste à supprimer un objet  $x_i$  de la configuration, et à ajouter deux objets  $u$  et  $v$ , voisins au sens de  $\sim_I$ , obtenus à partir de  $x_i$ .

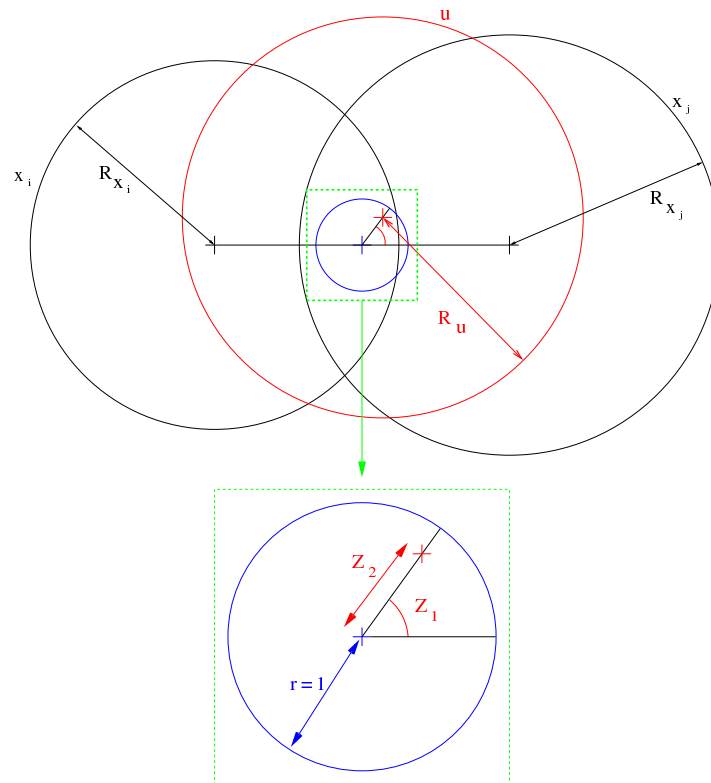


FIG. 11 – Schéma explicatif du mouvement de fusion.



### 5.3.1 Description de la fusion de deux objets

Pour fusionner deux objets voisins au sens de  $\sim_I$  (cf Fig. (11)), on commence par choisir équiprobablement une clique d'objets  $(x_i, x_j)$  dans la configuration  $\mathbf{x}$  avec la probabilité  $\frac{1}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})}$ . Ces deux objets ont respectivement pour coordonnées  $(X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i})$  et  $(X_{x_j}, Y_{x_j}, R_{x_j})$  dans l'espace objet U. Puis, on génère un vecteur de variables aléatoires  $z = (z_1, z_2, z_3) \in Z_f \subset \mathbb{R}^3$ , qui nous permet de calculer l'objet  $u = (X_u, Y_u, R_u)$ , résultant de la fusion de  $x_i$  et  $x_j$  :

$$T_f \left( \begin{bmatrix} X_{x_i} \\ Y_{x_i} \\ R_{x_i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_{x_j} \\ Y_{x_j} \\ R_{x_j} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{X_{x_i} + X_{x_j}}{2} + z_2 \cos(z_1) \\ \frac{Y_{x_i} + Y_{x_j}}{2} + z_2 \sin(z_1) \\ \frac{R_{x_i} + R_{x_j}}{2} + z_3 \end{bmatrix}.$$

Les variables aléatoires  $z_1$ , tirée uniformément sur  $[0, 2\pi[$ , et  $z_2$ , tirée suivant une loi normale tronquée de moyenne 0 et de variance  $\frac{1}{9}$  sur  $]0, 1]$ ,  $f_{z_2}(\cdot)$ , nous permettent d'obtenir la position de  $u$  dans un disque de rayon 1 autour du milieu des centres des objets à fusionner. La variable aléatoire  $z_3$ , qui nous permet de calculer la marque de  $u$ , est tirée uniformément sur  $\left[ \max \left( -1, R_m - \frac{R_{x_i} + R_{x_j}}{2} \right), \min \left( 1, R_M - \frac{R_{x_i} + R_{x_j}}{2} \right) \right] = [m_{z_3}, M_{z_3}]$ . La loi de probabilité de la variable aléatoire  $z$  est donc :

$$d\mathbf{P}_f(z) = f_f(z) \nu(dz) = \frac{1}{2\pi} f_{z_2}(z_2) \frac{1}{M_{z_3} - m_{z_3}} \nu(dz)$$

La fonction  $\eta_{x_i, x_j}(z)$ , qui à un élément de  $Z_f$  associe l'objet  $u$  résultant de la fusion, est un difféomorphisme dont le jacobien vaut :

$$|J_{\eta_{x_i, x_j}}(z)| = z_2 > 0$$

### 5.3.2 Description de la division d'un objet

Pour diviser un objet de la configuration  $\mathbf{x}$  (cf Fig. (11)), on commence par choisir équiprobablement l'objet  $x_i$  avec la probabilité  $\frac{1}{n(\mathbf{x})}$ . Cet objet a pour coordonnées  $(X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i})$  dans l'espace objet U. Puis, on génère un vecteur de variables aléatoires  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in Z_d \subset \mathbb{R}^6$ , qui nous permet de calculer les deux objets  $u_1 = (X_{u_1}, Y_{u_1}, R_{u_1})$  et  $u_2 = (X_{u_2}, Y_{u_2}, R_{u_2})$ , résultant de la division de  $x_i$  :

$$T_d \left( \begin{bmatrix} X_{x_i} \\ Y_{x_i} \\ R_{x_i} \end{bmatrix} \right) = \left( \begin{bmatrix} X_{x_i} + z_2 \cos(z_1) + \frac{z_5 \cos(z_4)}{2} \\ Y_{x_i} + z_2 \sin(z_1) + \frac{z_5 \sin(z_4)}{2} \\ R_{x_i} + z_3 + \frac{z_6}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_{x_i} + z_2 \cos(z_1) - \frac{z_5 \cos(z_4)}{2} \\ Y_{x_i} + z_2 \sin(z_1) - \frac{z_5 \sin(z_4)}{2} \\ R_{x_i} + z_3 - \frac{z_6}{2} \end{bmatrix} \right).$$

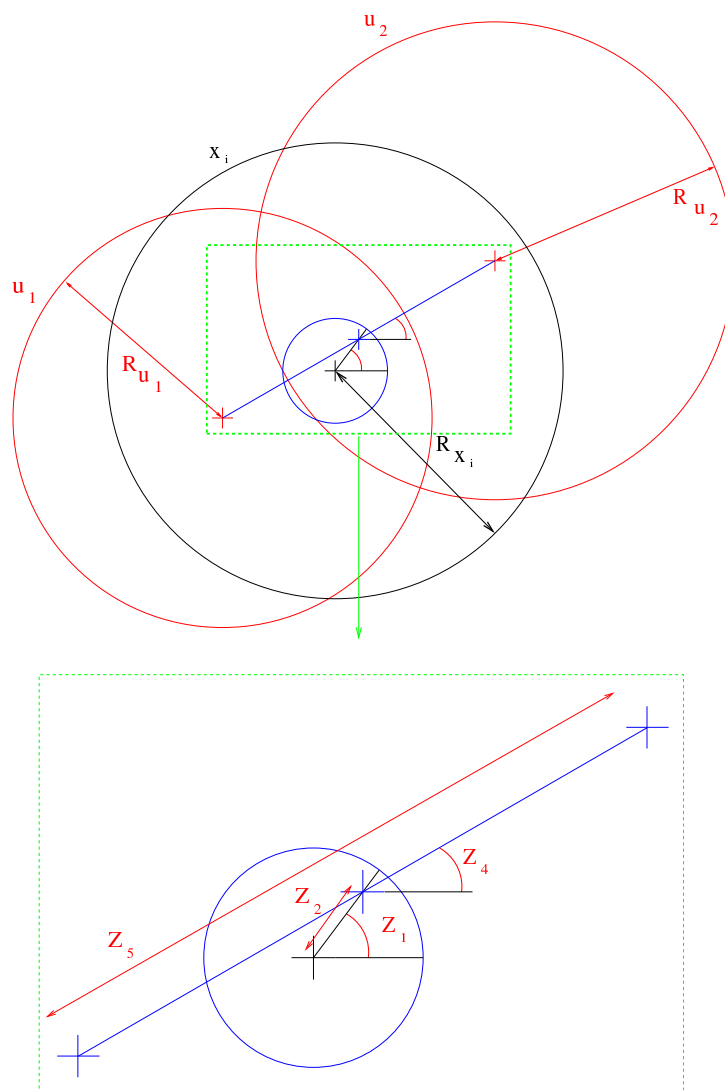


FIG. 12 – Schéma explicatif du mouvement de division.

Le vecteur  $z$  est choisi de façon à rendre ce mouvement symétrique de la fusion. Les variables aléatoires  $z_1$ , tirée uniformément sur  $[0, 2\pi[$ , et  $z_2$ , tirée suivant une loi normale tronquée de moyenne 0 et de variance  $\frac{1}{9}$  sur  $]0, 1]$ ,  $f_{z_2}(\cdot)$ , nous permettent d'obtenir la position du milieu des centres des objets  $u_1$  et  $u_2$ . La variable aléatoire  $z_3$ , qui nous permet de calculer la moyenne des marques de  $u_1$  et  $u_2$ , est tirée uniformément sur  $[\max(-1, R_m - R_{x_i}), \min(1, R_M - R_{x_i})] = [m_{z_3}, M_{z_3}]$ . La variable aléatoire  $z_4$ , tirée uniformément sur  $[0, \pi[$ , nous donne l'orientation de l'axe reliant les deux objets par rapport à l'axe des  $X$ . Pour s'assurer du voisinage de ces deux objets,  $u_1 \sim_I u_2$ , il faut que l'on ait la relation suivante :

$$d(u_1, u_2) < R_{u_1} + R_{u_2} = 2(R_{x_i} + z_3).$$

La variable aléatoire  $z_5 = d(u_1, u_2)$  est donc tirée uniformément sur  $]0, 2(R_{x_i} + z_3)[$ , celle-ci devant être non nulle puisque notre processus est simple. Enfin, la dernière variable  $z_6$  nous donne la différence entre les rayons des objets. Celle-ci est tirée uniformément sur  $[-M_{z_6}, M_{z_6}]$ , où  $M_{z_6} = \min(R_M - (R_{x_i} + z_3), (R_{x_i} + z_3) - R_m)$ , afin que l'on ait  $R_m \leq \frac{R_{u_1}}{R_{u_2}} \leq R_M$ . La loi de probabilité de la variable aléatoire  $z$  est donc :

$$d\mathbf{P}_d(z) = f_d(z)\nu(dz) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 f_{z_2}(z_2) \frac{1}{M_{z_3} - m_{z_3}} \frac{1}{2(R_{x_i} + z_3)} \frac{1}{M_{z_6}} \nu(dz)$$

La fonction  $\zeta_{x_i}(z)$ , qui à un élément de  $Z_d$ , associe les objets  $u_1$  et  $u_2$  résultant de la division, est un difféomorphisme dont le jacobien vaut

$$|J_{\zeta_{x_i}}(z)| = z_2 z_5 > 0$$

A un vecteur de  $U \times U \times Z_f$ , on associe un et un seul vecteur sur  $U \times Z_d$ , et réciproquement. L'application

$$\begin{aligned} U \times U \times Z_f &\leftrightarrow U \times Z_d \\ (X_{x_i}, Y_{x_i}, R_{x_i}, X_{x_j}, Y_{x_j}, R_{x_j}, z_1, z_2, z_3) &\leftrightarrow (X_u, Y_u, R_u, z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6) \end{aligned}$$

est une bijection, où l'on remarque d'une part que  $z_2 = z'_2$ , d'autre part que par construction,  $z'_5 = d(x_i, x_j)$ .

### 5.3.3 Calcul des noyaux de propositions

D'après ce qui précède, la modélisation de nos mouvements mène à :

$$\begin{aligned}
Q_f(\mathbf{x}, A) &= \frac{1}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})} \sum_{x_i \sim_I x_j} \int_{Z_f} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{\eta_{x_i, x_j}(z)\}) \overbrace{f_f(z) \nu(dz)}^{d\mathbf{P}_f(z)} \\
&= \frac{1}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})} \sum_{x_i \sim_I x_j} \int_{\eta_{x_i, x_j}(Z_f) \subset U} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}) f_f(\eta_{x_i, x_j}^{-1}(u)) |J_{\eta_{x_i, x_j}^{-1}}(u)| \nu(du) \\
&= \frac{1}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})} \int_U \sum_{x_i \sim_I x_j} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}) \mathbf{1}_{u \in \eta_{x_i, x_j}(Z_f)} f_f(\eta_{x_i, x_j}^{-1}(u)) |J_{\eta_{x_i, x_j}^{-1}}(u)| \nu(du)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Q_d(\mathbf{x}, A) &= \frac{1}{n(\mathbf{x})} \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \int_{Z_d} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus \{x_i\} \cup \{\zeta_{x_i}(z)\}) \overbrace{f_d(z) \nu(dz)}^{d\mathbf{P}_d(z)} \\
&= \frac{1}{n(\mathbf{x})} \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \int_{\zeta_{x_i}(Z_d) \subset U \times U} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus \{x_i\} \cup \{u_1 \cup u_2\}) f_d(\zeta_{x_i}^{-1}(u_1, u_2)) |J_{\zeta_{x_i}^{-1}}(u_1, u_2)| \nu(du_1) \nu(du_2) \\
&= \frac{1}{n(\mathbf{x})} \int_{U^2} \sum_{x_i \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus \{x_i\} \cup \{u_1 \cup u_2\}) \mathbf{1}_{(u_1, u_2) \in \zeta_{x_i}(Z_d)} f_d(\zeta_{x_i}^{-1}(u_1, u_2)) |J_{\zeta_{x_i}^{-1}}(u_1, u_2)| \nu(du_1) \nu(du_2)
\end{aligned}$$

### 5.3.4 Mesure symétrique $\xi_{fd}$

Pour le mouvement de fusion/division, on définit comme suit la mesure symétrique  $\xi_{fd}(\cdot, \cdot)$  sur  $\Psi \times \Psi$  :

$$\begin{aligned}
\xi_{fd}(A, B) &= \int_{\Psi} \int_{u \in U} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \sum_{(x_i, x_j) \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}) \nu(du) \mu(d\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Psi} \int_{(u_1, u_2) \in U} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \setminus \{u\} \cup \{u_1 \cup u_2\}) \frac{\nu(du_1) \nu(du_2)}{2} \mu(d\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Celle-ci est symétrique si l'on démontre que quels que soient les boréliens  $A, B \in \mathcal{B}(\Psi)$ , en notant  $A_n = A \cap \Psi_n$ ,

$$\xi_{fd}(A_{n+1}, B_n) = \xi_{fd}(B_n, A_{n+1}).$$

Or,

$$\begin{aligned}
\xi_{fd}(A_{n+1}, B_n) &= \int_{\Psi_{n+1}} \int_{u \in U} \mathbf{1}_{A_{n+1}}(\mathbf{x}) \sum_{(x_i, x_j) \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}) \nu(du) \mu(d\mathbf{x}) \\
&= \frac{e^{-\nu(U)}}{(n+1)!} \int_{U^{n+1}} \int_{u \in U} \mathbf{1}_{A_{n+1}}(\mathbf{x}) \sum_{(x_i, x_j) \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}) \underbrace{\nu(du) \nu^{n+1}(d\mathbf{x})}_{\nu^{n+2}(\cdot)} \\
&= \frac{e^{-\nu(U)}}{(n+1)!} \int_{U^{n+1}} \int_{u \in U} C_{n+1}^2 \mathbf{1}_{A_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}) \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{x} \setminus \{x_n \cup x_{n+1}\} \cup \{u\}) \nu^{n+2}(\cdot) \\
&= \frac{e^{-\nu(U)}}{n!} \int_{U^n} \int_{(x_n, x_{n+1}) \in U} \frac{n}{2} \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{y} = \{x_1, \dots, x_{n-1}, u\}) \mathbf{1}_{A_{n+1}}(\mathbf{y} \setminus \{u\} \cup \{x_n \cup x_{n+1}\}) \nu^{n+2}(\cdot) \\
&= \frac{e^{-\nu(U)}}{n!} \int_{U^n} \int_{(x_n, x_{n+1}) \in U} \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{y}) \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathbf{y}} \mathbf{1}_{A_{n+1}}(\mathbf{y} \setminus \{u\} \cup \{x_n \cup x_{n+1}\}) \nu^{n+2}(\cdot) \\
&= \int_{\Psi_n} \int_{(x_n, x_{n+1}) \in U} \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{y}) \sum_{u \in \mathbf{y}} \mathbf{1}_{A_{n+1}}(\mathbf{y} \setminus \{u\} \cup \{x_n \cup x_{n+1}\}) \frac{\nu(dx_n) \nu(dx_{n+1})}{2} \mu(d\mathbf{y}) \\
&= \xi_{fd}(B_n, A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Ceci montre bien que la mesure  $\xi_{fd}(\cdot, \cdot)$  ainsi définie sur  $\Psi \times \Psi$  est symétrique.

### 5.3.5 Dérivées de Radon Nikodym

#### Cas de la fusion

Soit  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}$ . Nous étudions la transition  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ . Comme requis,  $\pi(\cdot) Q_{fd}(\cdot, \cdot)$  est absolument continu par rapport à la mesure symétrique  $\xi_{fd}(\cdot, \cdot)$  puisque :

$$\pi(d\mathbf{x}) Q_{fd}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = h(\mathbf{x}) \mu(d\mathbf{x}) \frac{p_f}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})} f_f(\eta_{x_i, x_j}^{-1}(u)) |J_{\eta_{x_i, x_j}^{-1}}(u)| \nu(du) \quad (46)$$

et

$$\xi_{fd}(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \nu(du) \mu(d\mathbf{x}) \quad (47)$$

La dérivée de Radon Nikodym associée à ce mouvement se déduit de (46) et (47) :

$$f_{fd}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_f \frac{h(\mathbf{x})}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})} \frac{f_f(\eta_{x_i, x_j}^{-1}(u))}{z_2} \quad (48)$$

### Cas de la division

Soit  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus \{x_i\} \cup \{u_1 \cup u_2\}$ . Nous étudions la transition  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ . Comme requis,  $\pi(\cdot)Q_{fd}(\cdot, \cdot)$  est absolument continu par rapport à la mesure symétrique  $\xi_{fd}(\cdot, \cdot)$  puisque :

$$\pi(d\mathbf{x})Q_{fd}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = h(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x}) \frac{p_d}{n(\mathbf{x})} f_d(\zeta_{x_i}^{-1}(u_1, u_2)) |J_{\zeta_{x_i}^{-1}}(u_1, u_2)| \nu(du_1)\nu(du_2) \quad (49)$$

et

$$\xi_{fd}(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \nu(du_1)\nu(du_2)\mu(d\mathbf{x}) \quad (50)$$

La dérivée de Radon Nikodym associée à ce mouvement se déduit de (49) et (50) :

$$f_{fd}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_d \frac{h(\mathbf{x})}{n(\mathbf{x})} \frac{f_d(\zeta_{x_i}^{-1}(u_1, u_2))}{z_2 \cdot d(u_1, u_2)} \quad (51)$$

#### 5.3.6 Taux d'acceptation des mouvements de fusion et de division

On déduit de (48) et (51) les taux d'acceptation des deux mouvements :

$$\alpha_f(\mathbf{x}_t, \underbrace{\mathbf{x}_t \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}}_{\mathbf{y}}) = \min \left( 1, \frac{p_d}{p_f} \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x}_t)} \frac{n_{\sim_I}(\mathbf{x}_t)}{n(\mathbf{x}_t) - 1} \frac{f_d(\zeta_u^{-1}(x_i, x_j))}{f_f(\eta_{x_i, x_j}^{-1}(u))} \frac{1}{d(x_i, x_j)} \right) \quad (52)$$

et

$$\alpha_d(\mathbf{x}_t, \underbrace{\mathbf{x}_t \setminus \{x_i\} \cup \{u_1 \cup u_2\}}_{\mathbf{y}}) = \min \left( 1, \frac{p_f}{p_d} \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x}_t)} \frac{n(\mathbf{x}_t)}{n_{\sim_I}(\mathbf{y})} \frac{f_f(\eta_{u_1, u_2}^{-1}(x_i))}{f_d(\zeta_{x_i}^{-1}(u_1, u_2))} d(u_1, u_2) \right) \quad (53)$$

## 6 Convergence de l'algorithme proposé

Nous avons décrit, dans la partie précédente, les noyaux de propositions que nous utilisons dans la simulation. Il s'agit des noyaux de translation,  $Q_\tau(\cdot, \cdot)$ , d'homothétie,  $Q_\delta(\cdot, \cdot)$ , de translation/homothétie,  $Q_{\tau\delta}(\cdot, \cdot)$ , de naissance/mort,  $Q_{nm}(\cdot, \cdot)$ , et de

fusion/division,  $Q_{fd}(.,.)$ .

Il nous reste à montrer que l'algorithme A énoncé précédemment converge bien vers la mesure objectif  $\pi(.)$  de densité non normalisée  $h(.)$  par rapport à la mesure de référence  $\mu(.)$ . Les conditions de convergence d'une chaîne de Markov vers sa loi stationnaire peuvent être trouvées dans [1].

La récurrence de la chaîne de Markov est assurée par le calcul des taux d'acceptation des transitions [5]. Il nous reste à démontrer l'irréductibilité, ainsi que la récurrence au sens de Harris [2].

## 6.1 Irréductibilité de la chaîne

**Proposition 6.1 : Irréductibilité, Ensembles petits**

Si la densité non normalisée  $h(.)$  vérifie la condition de stabilité (4), alors  
***l'algorithme A simule une chaîne de Markov irréductible*** et tout  
 ensemble borné de  $\Psi$  est petit.

◇ **Démonstration :**

Cette démonstration est disponible dans [13].

◇

L'algorithme A simule donc une chaîne ***irréductible***. Etant réversible, par construction des taux d'acceptation des mouvements  $\alpha_i(\mathbf{x}_t, \mathbf{y})$ , elle est ***positive***.

## 6.2 Positivité au sens de Harris

La récurrence au sens de Harris est une condition plus forte que l'irréductibilité, puisqu'elle ne dit pas que la probabilité de visite de la chaîne dans tout borélien est strictement positive, mais qu'elle est égale à 1. D'après [2], une propriété plus forte est l'***ergodicité géométrique***, qui est vérifiée si une condition dite de ***drift géométrique*** est satisfaite.

**Proposition 6.2 : Condition de drift géométrique**

Soit une chaîne de Markov de noyau de transition  $K(.,.)$ . S'il existe une fonction  $V : \Psi \rightarrow [1, \infty)$ , des constantes  $a < 1$  et  $b < \infty$ , ainsi qu'un ensemble petit  $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\Psi)$ , tels que  $\forall \mathbf{x} \in \Psi$ ,

$$KV(\mathbf{x}) = \int_{\Psi} K(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \leq aV(\mathbf{x}) + b\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}), \quad (54)$$

alors la chaîne de Markov est ergodique géométriquement.

Nous allons établir cette propriété pour la chaîne de Markov simulée par l'algorithme A. Au cours de la démonstration, nous aurons besoin du résultat du lemme suivant, qui exhibe une propriété du rapport du nombre de cliques sur le nombre d'objets de la configuration, ainsi que de trois conditions sur notre modèle.

**Lemme 6.3 : Propriété sur  $n_{\sim_I}(\mathbf{x})$** 

Il existe un entier  $N_{dec}$  tel que pour toute configuration  $\mathbf{x} \in \Psi$ ,

$$n(\mathbf{x}) \geq N_{dec} \implies n_{\sim_I}(\mathbf{x}) \geq \frac{n(\mathbf{x})(n(\mathbf{x}) - N_{dec})}{2 \cdot N_{dec}}. \quad (55)$$

Autrement dit, le rapport  $\frac{n(\mathbf{x})}{n_{\sim_I}(\mathbf{x})}$  tend vers 0 quand  $n(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ .

**◇ Démonstration :**

Cette démonstration est disponible dans [2].

◇

Les trois conditions que nous énonçons sont suffisantes pour démontrer la positivité au sens de Harris de la chaîne, et concernent le noyau de fusion/division. Elles sont en fait acquises suite au choix de notre modèle :

- CONDITION  $c_1$  : majoration de la densité  $f_f(z)$ .

Celle-ci est obtenue par construction puisque :

$$\begin{aligned} M_{z_3} - m_{z_3} &\geq \min(1, R_M - R_m) \\ \implies f_f(z) &= \frac{1}{2\pi} f_{z_2}(z_2) \frac{1}{M_{z_3} - m_{z_3}} \leq \frac{f_{z_2}(0)}{2\pi \min(1, R_M - R_m)} = M_{f_f}. \end{aligned}$$



- CONDITION  $c_2$  : minoration de la densité  $f_d(z)$ .  
Celle-ci est aussi obtenue par construction puisque :

$$M_{z_3} - m_{z_3} \leq 2, R_{x_i} + z_3 \leq R_M, M_{z_6} \leq \frac{R_M - R_m}{2}$$

$$\Rightarrow f_d(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 f_{z_2}(z_2) \frac{1}{M_{z_3} - m_{z_3}} \frac{1}{2(R_{x_i} + z_3)} \frac{1}{M_{z_6}} \geq \frac{f_{z_2}(1)}{(2\pi)^2 2R_M(R_M - R_m)} = m_{f_d}.$$

- CONDITION  $c_3$  : majoration de l'inverse de l'intensité conditionnelle de Papangelou.

Une nouvelle fois, le choix du troisième modèle d'interaction d'aires implique automatiquement la minoration de l'intensité conditionnelle de Papangelou par un terme strictement positif (31) :

$$\lambda^*(\mathbf{x}, \xi) \geq m_h > 0 \Rightarrow 0 < \frac{h(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x} \cup \{\xi\})} \leq \frac{1}{m_h}$$

**Proposition 6.4 : Récurrence de Harris, Ergodicité géométrique**

Si la densité non normalisée  $h(\cdot)$  vérifie la condition de stabilité (4), ainsi que les conditions  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ , alors ***l'algorithme A simule une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris et ergodique géométriquement.***

◇ **Démonstration :**

**Etape 1 :**

Nous pouvons tout d'abord, grâce à (4), minorer la probabilité d'accepter une mort et majorer celle d'accepter une naissance dans le noyau de propositions de naissance et de mort. Pour tout  $\epsilon \in ]0,1[$ , dès que  $n(\mathbf{x}) \geq N_{nm,\epsilon} = \frac{p_m}{p_n} \frac{M_h \nu(U)}{\epsilon}$ , on a :

$$\alpha_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus \{u\}) = \min \left( 1, \frac{p_n}{p_m} \frac{h(\mathbf{x} \setminus \{u\})}{h(\mathbf{x})} \frac{n(\mathbf{x})}{\nu(U)} \right) = 1$$

et

$$\alpha_n(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup \{u\}) = \min \left( 1, \frac{p_m}{p_n} \frac{h(\mathbf{x} \cup \{u\})}{h(\mathbf{x})} \frac{\nu(U)}{n(\mathbf{x}) + 1} \right) \leq \epsilon.$$

**Etape 2 :**

Nous devons faire de même avec le noyau de propositions de fusion et de division. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_d(\mathbf{x}, \underbrace{\mathbf{x} \setminus \{x_i\} \cup \{u_1 \cup u_2\}}_{\mathbf{y}}) &= \min \left( 1, \frac{p_f}{p_d} \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x})} \frac{n(\mathbf{x})}{n_{\sim_I}(\mathbf{y})} \frac{f_f(\eta_{u_1, u_2}^{-1}(x_i))}{f_d(\zeta_{x_i}^{-1}(u_1, u_2))} d(u_1, u_2) \right) \\ &\leq \frac{p_f}{p_d} \frac{M_h^2}{m_h} \frac{n(\mathbf{x})}{n_{\sim_I}(\mathbf{y})} \frac{M_{ff}}{m_{fd}} d_{max} \end{aligned}$$

d'après les conditions  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ . De plus, le lemme énoncé précédemment nous assure l'existence d'un entier  $N_{dec}$  tel que pour tout  $n(\mathbf{y}) \geq N_{dec}$ , et donc a fortiori pour tout  $n(\mathbf{x}) \geq N_{dec}$  :

$$\begin{aligned} \alpha_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq \frac{p_f}{p_d} \frac{M_h^2}{m_h} \frac{n(\mathbf{x})}{\frac{(n(\mathbf{x})+1) \cdot (n(\mathbf{x})+1 - N_{dec})}{2 \cdot N_{dec}}} \frac{M_{ff}}{m_{fd}} d_{max} \\ &\leq \frac{p_f}{p_d} \frac{M_h^2}{m_h} \frac{2 \cdot N_{dec}}{n(\mathbf{x}) - N_{dec}} \frac{M_{ff}}{m_{fd}} d_{max}. \end{aligned}$$

Pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ , on peut trouver un  $N_{fd, \epsilon}$  assez grand tel que le membre de droite dans l'inégalité précédente soit inférieur à  $\epsilon$ . Il suffit alors de travailler sur des configurations telles que  $n(\mathbf{x}) \geq \max(N_{fd, \epsilon}, N_{dec})$ , afin d'avoir :

$$\alpha_d(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus \{x_i\} \cup \{u_1 \cup u_2\}) \leq \epsilon$$

Avec les mêmes conditions, par symétrie du taux d'acceptation, on montre que :

$$\begin{aligned} \alpha_f(\mathbf{x}, \underbrace{\mathbf{x} \setminus \{x_i \cup x_j\} \cup \{u\}}_{\mathbf{y}}) &= \min \left( 1, \frac{p_d}{p_f} \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x}_t)} \frac{n_{\sim_I}(\mathbf{x}_t)}{n(\mathbf{x}_t) - 1} \frac{f_d(\zeta_u^{-1}(x_i, x_j))}{f_f(\eta_{x_i, x_j}^{-1}(u))} \frac{1}{d(x_i, x_j)} \right) \\ &\geq \min \left( 1, \frac{p_d}{p_f} \frac{m_h}{M_h^2} \frac{n(\mathbf{x}) - N_{dec}}{2 \cdot N_{dec}} \frac{m_{fd}}{M_{ff}} \frac{1}{d_{max}} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Etape 3 :**

On pose ensuite  $V(\mathbf{x}) = A^{n(\mathbf{x})}$  avec  $A > 1$ , et on écrit  $K(.,.)$  le noyau de transition de la chaîne de Markov. En reprenant les notations de (54), et en prenant  $n(\mathbf{x}) \geq N_\epsilon = \max(N_{nm,\epsilon}, N_{fd,\epsilon}, N_{dec})$  :

$$KV(\mathbf{x}) = \left( \frac{p_{nm}p_m\alpha_m + p_{fd}p_f\alpha_f}{A} + \underbrace{\quad}_{\text{rejets et mvmts simples}} + A.(p_{nm}p_n\alpha_n + p_{fd}p_d\alpha_d) \right) V(\mathbf{x})$$

avec

$$p_{rms} = p_{nm}p_m(1-\alpha_m) + p_{fd}p_f(1-\alpha_f) + p_{nm}p_n(1-\alpha_n) + p_{fd}p_d(1-\alpha_d) + p_\tau + p_\delta + p_{\tau\delta} + p_\emptyset.$$

D'où

$$KV(\mathbf{x}) \leq \underbrace{\left( \frac{p_{nm}p_m + p_{fd}p_f}{A} + [p_{nm}p_n + p_{fd}p_d + p_\tau + p_\delta + p_{\tau\delta} + p_\emptyset] + \epsilon.A.(p_{nm}p_n + p_{fd}p_d) \right)}_{G(\epsilon)} V(\mathbf{x}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) &= p_{nm}(p_n + \frac{p_m}{A}) + p_{fd}(p_d + \frac{p_f}{A}) + p_\tau + p_\delta + p_{\tau\delta} + p_\emptyset \\ &< p_{nm} + p_{fd} + p_\tau + p_\delta + p_{\tau\delta} + p_\emptyset = 1 \end{aligned}$$

puisque  $A > 1$ . En choisissant  $\epsilon$  assez petit, on peut donc trouver une constante  $a < 1$  telle que

$$KV(\mathbf{x}) \leq aV(\mathbf{x}),$$

dès que  $n(\mathbf{x}) \geq N_\epsilon$ .

Il suffit alors de choisir comme ensemble petit l'ensemble borné  $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \Psi : n(\mathbf{x}) < N_\epsilon\}$ , et comme constante  $b$  un majorant de  $KV(\mathbf{x})$  sur cet ensemble  $\mathcal{C}$ , à savoir  $b = A^{N_\epsilon+1}$ . La condition de drift géométrique est donc bien vérifiée puisqu'alors :

$$KV(\mathbf{x}) \leq aV(\mathbf{x}) + b\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Psi.$$

Ceci achève la démonstration.

◇

L'algorithme A simule donc une chaîne **ergodique géométriquement**. Etant réversible, irréductible, et apériodique avec un choix de  $p_0 > 0$ , elle converge en variation totale vers la loi objectif  $\pi(\cdot)$ .

## 7 Résultats

### 7.1 Choix de l'image de test

Nous avons testé notre modèle sur des images de peupleraies, fournies par l'IFN, équivalentes à 1 hectare sur le terrain. La Fig. (13) représente une image de  $200 \times 140$  pixels, extraite manuellement de la Fig. (1). L'idéal aurait été d'établir un processus automatique de segmentation de l'image d'origine par espèce d'arbres, en utilisant, par exemple, des informations de texture afin d'obtenir une signature particulière pour chacune des espèces. Nous nous attacherons par la suite à réaliser une telle classification. Cette image a été acquise par un capteur comportant trois bandes spectrales : vert-jaune, rouge et proche infrarouge. C'est la composante proche infrarouge qui fait ressortir les chlorophylliens (peupliers).

### 7.2 Extraction

Nous présentons sur la Fig. (14) un résultat d'extraction des houppiers à partir de l'image de la Fig. (13).

Nous remarquons que l'extraction des houppiers est correctement réalisée, seules les zones denses sont parfois difficiles à traiter avec exactitude. A partir d'un tel résultat, il nous est possible d'exploiter la configuration finale obtenue dans le but d'obtenir des statistiques sur le peuplement telles que le nombre de peupliers, la densité ou la distribution des diamètres des arbres. Ceci est automatique puisque les coordonnées de chaque objet dans l'espace objet  $U$  représentent la position et le rayon des disques.

- nombre d'arbres : 306.
- densité : 374,8 arbres par hectare.
- diamètre moyen des arbres : 7,65 pixels soit environ 4m13.
- variance de la distribution des diamètres : 1,4187 pixels soit 0,7661m.

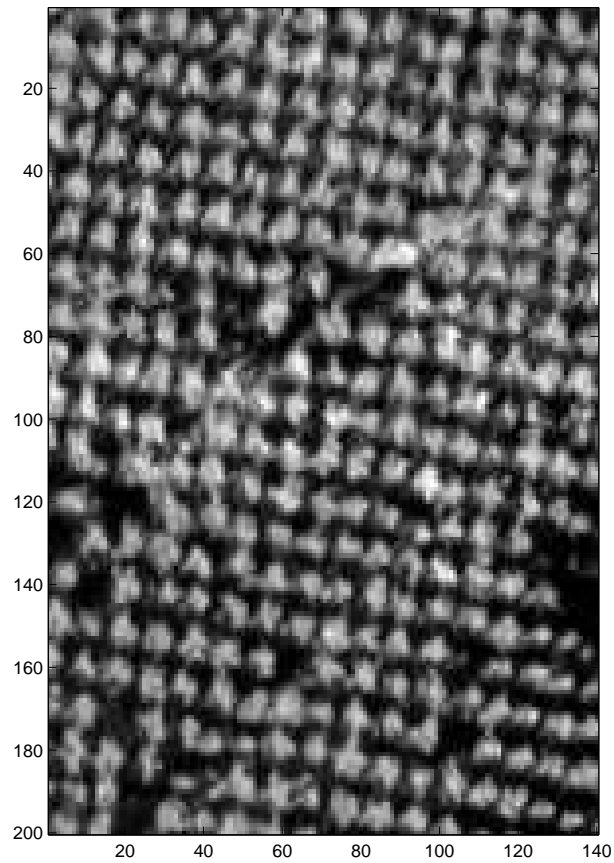


FIG. 13 – *Extrait de l'image de Saône et Loire,  $200 \times 140$  pixels. ©IFN.*

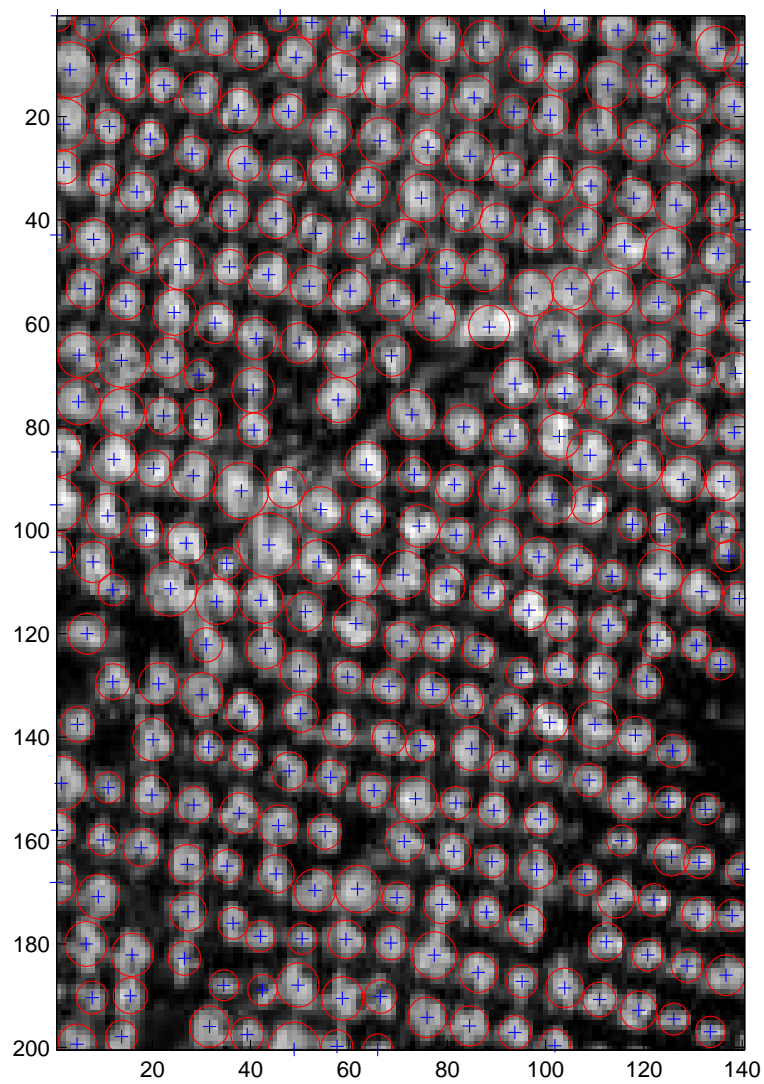


FIG. 14 – *Extraction obtenue sur l'image  $200 \times 140$  pixels. 1 million d'itérations, temps CPU: 212 secondes*

- taux de recouvrement (surface occupée par les arbres par rapport à la surface totale) : approximativement 48%.

## 8 Perspectives

Les résultats obtenus sur les images de peupleraies sont très encourageants, et de nombreuses perspectives s'ouvrent à nous :

- **Transformée de Fourier :**

Plantés par l'homme, les peupleraies observent la plupart du temps un alignement et un espacement régulier dans deux directions. Nous pouvons le remarquer par exemple sur la Fig. (13), même si certains trous dans la zone sont présents. Aussi, une transformée de Fourier appliquée à l'image pourrait nous renseigner sur les fréquences fondamentales des positions des arbres. Cette approche est utilisée pour le comptage des oliviers dans [10]. Ces renseignements pourraient être injectés soit dans le modèle a priori, soit dans le noyau de propositions.

- **Naissance/Mort non uniforme :**

Nous pourrions nous servir de l'information précédente pour proposer une naissance (et donc une mort associée) non uniforme des objets : à partir d'un objet de la configuration, il serait intéressant de faire naître un nouvel objet à une distance et suivant une direction renseignées par les maxima spectraux. Cette naissance orientée accélérerait le processus d'extraction.

- **Estimation des paramètres :**

Il serait aussi intéressant d'estimer les paramètres de notre modèle de densité, à savoir  $\beta$  et  $\gamma_a$ , au moyen de techniques d'estimation. Dans un cadre bayésien, cela consisterait à trouver les meilleurs paramètres, c'est à dire ceux permettant d'obtenir la meilleure densité a posteriori de la configuration solution, étant donnée l'image. Ces méthodes, développées dans le projet Ariana, seront étudiées par la suite afin d'automatiser complètement notre processus d'extraction.

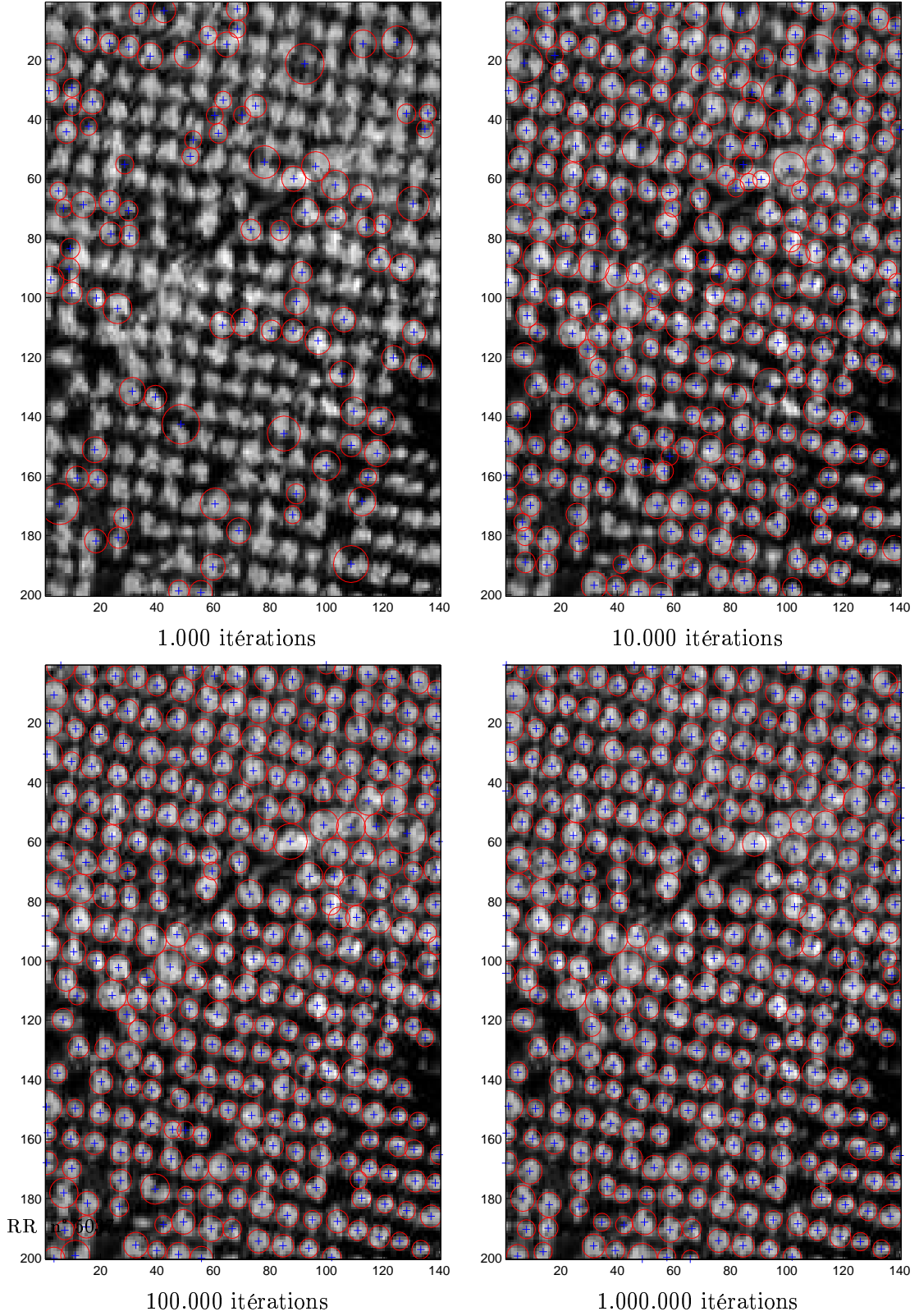


FIG. 15 – Evolution de la configuration d'objets en fonction du nombre d'itérations.



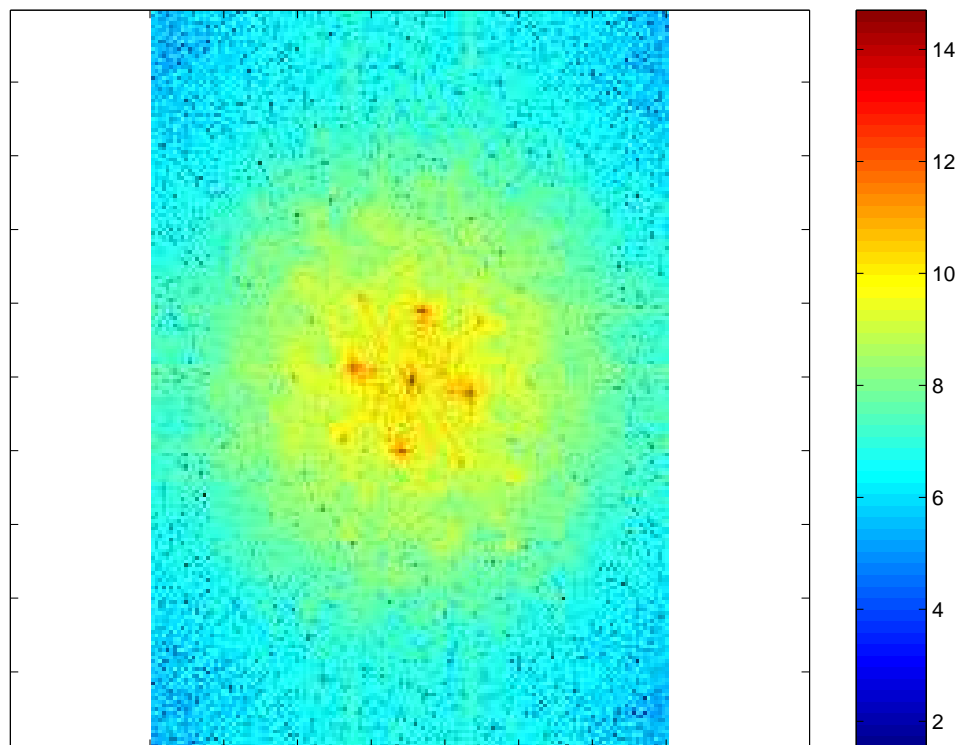


FIG. 16 – *Transformée de Fourier discrète de l'image de données, laissant apparaître les maxima spectraux*

## 9 Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la COLORS<sup>6</sup> Arbres (<http://www-sop.inria.fr/ariana/personnel/Guillaume.Perrin/colors.html>). Les auteurs remercient Jean-Guy Boureau et Jean Wolsack de l'IFN, ainsi que Michel Deshayes du Cemagref, pour la fourniture des données et les discussions stimulantes.

---

6. COopération Locale de Recherche Scientifique



## Références

- [1] P. Brémaud. *Markov chain : Gibbs fields, Monte Carlo simulation and queues*. Springer-Verlag, 2001.
- [2] C.J. Geyer and J. Moller. *Stochastic geometry, likelihood and computation*, chapter Likelihood inference for spatial point processes. Chapman and Hall, Londres, 1998.
- [3] F.A. Gougeon. A crown-following approach to the automatic delineation of individual tree crowns in high spatial resolution aerial images. *Canadian Journal of Remote Sensing*, 21(3), pages 274–284, 1995.
- [4] F.A. Gougeon. Automatic individual tree crown delineation using a valley-following algorithm and rule-based system. In D.A. Hill and D.G. Leckie, editors, *Proc. of the International Forum on Automated Interpretation of High Spatial Resolution Digital Imagery for Forestry*, pages 11–23, Victoria, British Columbia, Canada, 10-12 février 1998.
- [5] P.J. Green. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and bayesian model determination. *Biometrika* 82, pages 711–7320, 1995.
- [6] C. Lacoste, X. Descombes, and J. Zerubia. A comparative study of point processes for line network extraction in remote sensing. Rapport de Recherche n° 4516, INRIA, juillet 2002.
- [7] C. Lacoste, X. Descombes, J. Zerubia, and N. Baghdadi. Extraction automatique des réseaux linéiques à partir d’images satellitaires et aériennes par processus Markov objet. Bulletin de la SFPT n° 170, pages 13-22, novembre 2003.
- [8] M. Larsen. Individual tree top position estimation by template voting. In *Proc. of the Fourth International Airborne Remote Sensing Conference and Exhibition / 21<sup>st</sup> Canadian Symposium on Remote Sensing*, volume 2, pages 83–90, Ottawa, Ontario, 21-24 juin 1999.
- [9] M. Larsen and M. Rudemo. Using ray-traced templates to find individual trees in aerial photographs. In Michael Frydrych, Jussi Parkkinen, and Ari Visa, editors, *Proc. of the 10th Scandinavian Conference on Image Analysis*, volume 2, pages 1007–1014, Lappeenranta, Finland, 1997.
- [10] V. Muron and C. Jacquet. Mise au point de méthodes pour le comptage des oliviers. Bulletin de la SFPT n° 164/165, pages 87-95, 2001.
- [11] M. Ortner, X. Descombes, and J. Zerubia. Building extraction from digital elevation model. Rapport de Recherche n° 4517, INRIA, juillet 2002.

- [12] M. Ortner, X. Descombes, and J. Zerubia. Automatic 3d land register extraction from altimetric data in dense urban areas. Rapport de Recherche *n*<sup>o</sup> 4919, INRIA, août 2003.
- [13] M. Ortner, X. Descombes, and J. Zerubia. Improved RJMCMC point process sampler for object detection on images by simulated annealing. Rapport de Recherche *n*<sup>o</sup> 4900, INRIA, août 2003.
- [14] H. Rue and M. Hurn. Bayesian object identification. *Biometrika*, 86:649–660, mai 1999.
- [15] H. Rue and A.R. Syversveen. Bayesian object recognition with Baddeley’s delta loss. *Advances Applied Probability*, 30:64–84, 1998.



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399